



# Risikoquantifizierung: Charakteristische Funktion und numerische Methoden als Alternative zur Monte-Carlo-Simulation

# Zur Person

Ralf Knobloch

TH Köln, Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften

Arbeitsgebiete: (Quantitatives) Risikomanagement, Pensionsversicherungsmathematik, ...

Mitglied bei der Forschungsstelle FaRis (= Finanzielles & aktuarielles Risikomanagement)

Mitglied: DAV, IVS und DGVFM

# Agenda

1. Motivation
2. Charakteristische Funktion
3. Fallbeispiel 1
4. Fallbeispiel 2
5. Fallbeispiel 3
6. Fazit und Ausblick

# 1. Motivation

- Im quantitativen Risikomanagement gibt es komplexe Risiko-Modellierungen, bei denen die Berechnung von Quantilen und Kennzahlen auf direktem Weg bzw. analytisch nicht möglich ist.
- Dies gilt insbesondere für die Berechnung von Risikomaßen wie dem Value at Risk (VaR) und dem Expected Shortfall (ES).
- Gängige Methode ist dann die Monte-Carlo-Simulation und die Auswertung einer Vielzahl von fiktiven Beobachtungen mithilfe von statistischen Verfahren.

# 1. Motivation

Fragestellung:

- Kann man anstelle der Monte-Carlo-Simulation auch den Weg über die charakteristische Funktion bzw. den zugehörigen Umkehrsatz wählen?
- Geht das mit überschaubarem Aufwand und wie weit kommt man damit?

Diese Fragen werden im Folgenden anhand von Fallbeispielen diskutiert.

# 1. Motivation

Knobloch, Ralf:

*Risikoquantifizierung: Charakteristische Funktion und numerische Methoden als Alternative zur Monte-Carlo-Simulation - Fallbeispiele zu kombinierten Verteilungen*

Forschung am IVW Köln 1/2025

## 2. Charakteristische Funktion

Sei  $U$  eine reell-wertige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion  $F_U$  und  $i = \sqrt{-1}$ . Dann heißt die komplex-wertige Funktion

$$\psi_U(t) := E(e^{i \cdot t \cdot U}), t \in \mathbb{R},$$

charakteristische Funktion der Zufallsvariablen  $U$ .

## 2. Charakteristische Funktion

Eigenschaft 1 (Eindeutigkeitssatz):

Sei  $V$  eine zweite reell-wertige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion  $F_V$  und der charakteristischen Funktion

$$\psi_V(t) := E(e^{i \cdot t \cdot V}), t \in \mathbb{R},$$

so ist  $\psi_U = \psi_V$  äquivalent zu  $F_U = F_V$ .

D.h. die Verteilung einer Zufallsvariablen ist durch die charakteristische Funktion eindeutig festgelegt.

## 2. Charakteristische Funktion

Eigenschaft 2:

Ist  $E(|U|^n) < \infty$  für  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\psi_U$   $n$ -mal differenzierbar und es gilt

$$\psi_U^{(k)}(t) = i^k \cdot E(U^k \cdot e^{i \cdot t \cdot U})$$

bzw. insbesondere

$$\psi_U^{(k)}(0) = i^k \cdot E(U^k)$$

für  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Folgerung: Die Momente einer reell-wertigen Zufallsvariable können mithilfe der Differentialrechnung bzw. mithilfe numerischen Ableitens berechnet werden. I.d.R. wird dabei aber anstelle der charakteristische Funktion die reell-wertige momenterzeugende Funktion  $m(t) := \psi_U(-i \cdot t) = E(e^{t \cdot U})$  verwendet.

## 2. Charakteristische Funktion

Eigenschaft 3 (Umkehrformel):

Es sei  $a < b$

$$g(t, a, b) := \begin{cases} \frac{e^{-i \cdot a \cdot t} - e^{-i \cdot b \cdot t}}{i \cdot t} & , t \neq 0 \\ b - a & , t = 0 \end{cases}$$

dann gilt

$$\frac{1}{2} \cdot P(U = a) + P(a < U < b) + \frac{1}{2} \cdot P(U = b) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z g(t, a, b) \cdot \psi_U(t) dt .$$

## 2. Charakteristische Funktion

Eigenschaft 4 (modifizierte Umkehrformel):

Ist  $U$  eine **nichtnegative** reell-wertigen Zufallsvariable mit  $P(U = b) = 0$  für  $b > 0$  und  $P(U = 0) > 0$ , so gilt für die Verteilungsfunktion  $F_U$ :

$$\begin{aligned} F_U(b) &= P(0 \leq U \leq b) = P(U = 0) + P(0 < U < b) + P(U = b) \\ &= \frac{1}{2} \cdot P(U = 0) + \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t) dt + \frac{1}{2} \cdot P(U = b) \\ &= \frac{1}{2} \cdot P(U = 0) + \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt + \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot i \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \operatorname{Im}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot P(U = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z \operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt \end{aligned}$$

## 2. Charakteristische Funktion

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass

$$\operatorname{Re}(g(-t, 0, b) \cdot \psi_U(-t)) = \operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)),$$

d.h.  $\operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t))$  ist als Funktion von  $t$  achsensymmetrisch zur Funktionswertachse und

$$\operatorname{Im}(g(-t, 0, b) \cdot \psi_U(-t)) = -\operatorname{Im}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)),$$

d.h.  $\operatorname{Im}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t))$  ist als Funktion von  $t$  punktsymmetrisch zum Ursprung.

## 2. Charakteristische Funktion

Folgerung:

Die Verteilungsfunktion einer nichtnegativen reell-wertigen Zufallsvariable  $U$  kann für  $b > 0$  im Fall  $P(U = b) = 0$  mithilfe der Integralrechnung bzw. mithilfe numerischen Integrierens berechnet werden. Der Integrand ist dabei eine reell-wertige Funktion.

$$F_U(b) = \frac{1}{2} \cdot P(U = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z \operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt$$

### 3. Fallbeispiel 1

- Gegeben sei ein Risiko, das mehrmals pro Periode eintreten kann, z.B. ein operationelles Risiko (Versagen von Prozessen, Menschen und Systemen). Mit jedem Eintritt des Risikos sei ein Verlust verbunden. Die Verluste seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt.
- Die Häufigkeit des Eintritts dieses Risikos in einer Periode sei gegeben durch die  $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariable  $N$ . Der Erwartungswert sei gegeben durch  $\mu_N$ , die Standardabweichung durch  $\sigma_N < \infty$  und die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion durch  $h(s) := E(s^N), s \in [0,1]$ .
- Die Verluste seien gegeben durch die nichtnegativen Zufallsvariablen  $X_1, X_2, X_3, \dots$ . Diese sind gegeben  $N$  stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Der Erwartungswert sei gegeben durch  $\mu_X$ , die Standardabweichung durch  $\sigma_X < \infty$  und die charakteristische Funktion durch  $\varphi_X(u) := E(e^{i \cdot u \cdot X}), u \in \mathbb{R}$ .

### 3. Fallbeispiel 1

Der Gesamtperiodenverlust ist dann gegeben durch

$$Z := X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

$\mu$  sei der Erwartungswert,  $\sigma$  die Standardabweichung und

$$\Phi(u) := E(e^{i \cdot u \cdot Z}), u \in \mathbb{R},$$

die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen  $Z$ .

Mit der charakteristischen Funktion ist die Verteilung von  $Z$  eindeutig festgelegt

### 3. Fallbeispiel 1

Es gilt:

1.  $\Phi(u) = h(\varphi_X(u)), u \in \mathbb{R}$
2.  $\mu = \mu_N \cdot \mu_X$
3.  $\sigma^2 = \sigma_N^2 \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2$

Es handelt sich hierbei um ein Modell bzw. um ein Ergebnis, das auch in der Schadensversicherungsmathematik eine Rolle spielt. Vgl. zum Beweis *Wolfsdorf, K., Versicherungsmathematik Teil2 Theoretische Grundlagen, Risikotheorie, Sachversicherung, Seite 115ff.*

### 3. Fallbeispiel 1

Die Verteilung der Zufallsvariablen  $N$  sei gegeben durch:

$$P(N = 0) = \frac{5}{15}, P(N = 1) = \frac{4}{15}, P(N = 2) = \frac{3}{15}, P(N = 3) = \frac{2}{15}, P(N = 4) = \frac{1}{15}$$

Dann gilt  $\mu_N \approx 1,3333$ ,  $\sigma_N \approx 1,2473$  und

$$h(s) = \sum_{k=0}^4 s^k \cdot P(N = k) = \frac{1}{15} \cdot \sum_{k=0}^4 s^k \cdot (5 - k), s \in [0,1].$$

### 3. Fallbeispiel 1

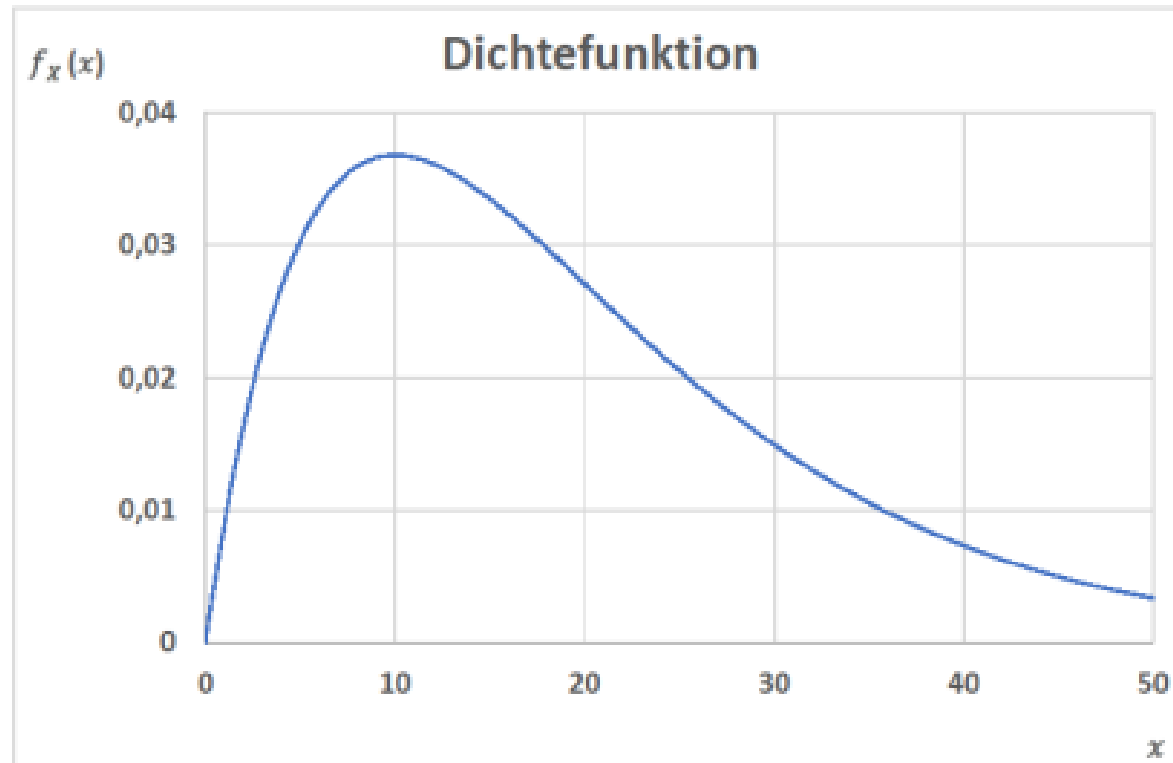
Für den Verlust, der mit dem Eintritt des Risikos verbunden ist, wird eine Gamma-Verteilung mit den Parametern  $\gamma = 2$  und  $\alpha = 0,1$  angesetzt. Die Dichte dieser Gamma-Verteilung ist gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 0,01 \cdot e^{-0,1 \cdot x} \cdot x & , x > 0 \end{cases} .$$

Dann gilt  $\mu_X = \frac{2}{0,1} = 20$ ,  $\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{0,1} \approx 14,1421$  und

$$\varphi_X(u) = \left( \frac{0,1}{0,1 - i \cdot u} \right)^2, u \in \mathbb{R}.$$

### 3. Fallbeispiel 1



### 3. Fallbeispiel 1

Durch Anwendung des obigen Satzes erhält man für den Gesamtperiodenverlust

$$\mu = \mu_N \cdot \mu_X \approx 1,3333 \cdot 20 = 26,6660$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_N^2 \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2} \approx \sqrt{1,2473^2 \cdot 20^2 + 1,3333 \cdot 14,1421^2} \approx 29,8155$$

$$\Phi(u) = h(\varphi_X(u)) = \frac{1}{15} \cdot \sum_{k=0}^4 \left( \operatorname{Re}(\varphi_X(u)) + i \cdot \operatorname{Im}(\varphi_X(u)) \right)^k \cdot (5 - k)$$

### 3. Fallbeispiel 1

Berechnungsschritte:

1. Bilde die momenterzeugende Funktion durch  $m(u) = \Phi(-i \cdot u) = E(e^{u \cdot Z})$ .
2. Leite die momenterzeugende Funktion zweimal numerisch ab und berechne damit den Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  der Gesamtperiodenverlustes.
3. Zerlege die charakteristische Funktion  $\Phi$  in Realteil und Imaginärteil (hier Anwendung binomischer Lehrsatz).
4. Bestimme  $Re(g(u, 0, b) \cdot \Phi(u))$  für  $b > 0$ .

### 3. Fallbeispiel 1

4. Bestimme  $P(Z = 0)$ .

5. Bestimme das  $\alpha \cdot 100\%$ -Quantil durch (numerisches) Lösen der Gleichung

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot P(Z = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^K \operatorname{Re}(g(u, 0, b) \cdot \Phi(u)) du$$

nach  $b$ . Dabei wird  $K$  hinreichend groß gewählt (im vorliegenden Beispiel mit  $K = 200$ ) und das Integral mit numerischer Integration berechnet.

Die Ergebnisse werden mit den Ergebnissen einer Monte-Carlo-Simulation (10.000 Simulationsläufe) verglichen.

### 3. Fallbeispiel 1

| Kennzahl<br>Quantil   | Monte-Carlo-<br>Simulation | Char. Funktion<br>und numerische<br>Methoden | Rel. Abw. In % |
|-----------------------|----------------------------|----------------------------------------------|----------------|
| Erwartungswert        | 26,3375                    | 26,6669                                      | 1,25%          |
| Standardabw.          | 29,5443                    | 29,8142                                      | 0,91%          |
| 90%-Quantil           | 69,1202                    | 69,5681                                      | 0,65%          |
| 95%-Quantil<br>VaR 5% | 85,3542                    | 85,9592                                      | 0,71%          |
| 99%-Quantil<br>VaR 1% | 118,0841                   | 118,3818                                     | 0,25%          |
| ES 5%                 | 105,3408                   | 105,3085                                     | -0,03%         |
| ES 1%                 | 134,9285                   | 135,2416                                     | 0,23%          |

## 4. Fallbeispiel 2

- Analog zu Fallbeispiel 1 mit anderen Verteilungen.
- Die Zufallsvariable  $N$  genüge einer Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda = 4$ .  
Dann gilt  $\mu_N = 4$ ,  $\sigma_N = 2$  und  $h(s) = e^{4 \cdot (s-1)}$ ,  $s \in [0,1]$ .
- Die Zufallsvariablen für die Verluste seien gegeben durch eine Pert-Verteilung mit den Parametern  
 $a = 0$  (best case),  $b = 1,25$  (normal case) und  $c = 5$  (worst case).

## 4. Fallbeispiel 2

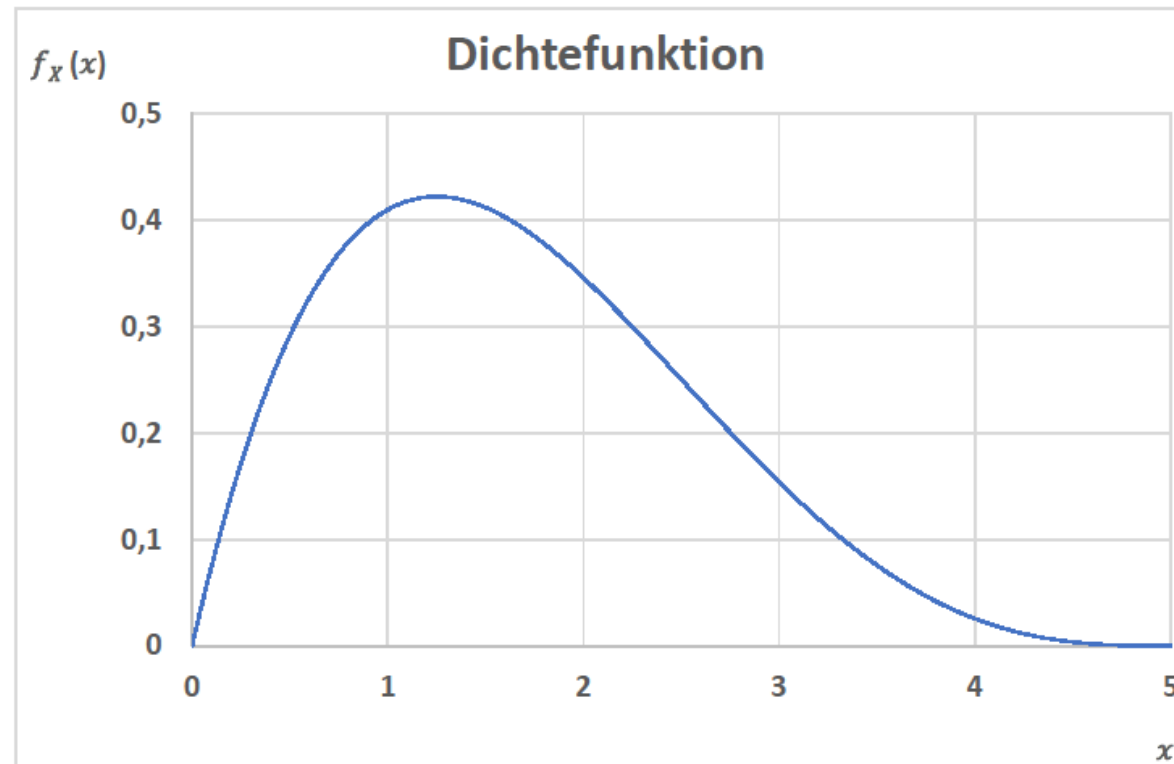
Bei der gewählten Pert-Verteilung handelt es sich um eine spezielle Beta-Verteilung auf dem Intervall  $[0,5]$  mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 0,0064 \cdot x \cdot (5 - x)^3 & , 0 < x < 5 \\ 0 & , x \geq 5 \end{cases} .$$

Dann gilt  $\mu_X \approx 1,6667$  und  $\sigma_X \approx 0,8909$ .

Die benötigten Werte der charakteristische Funktion  $\varphi_X(u)$  werden im vorliegenden Beispiel mithilfe numerischer Integration berechnet.

### 3. Fallbeispiel 2



## 4. Fallbeispiel 2

| Kennzahl<br>Quantil   | Monte-Carlo-<br>Simulation | Char. Funktion<br>und numerische<br>Methoden | Rel. Abw. In % |
|-----------------------|----------------------------|----------------------------------------------|----------------|
| Erwartungswert        | 6,6708                     | 6,6661                                       | -0,07%         |
| Standardabw.          | 3,7724                     | 3,7795                                       | 0,19%          |
| 90%-Quantil           | 11,7886                    | 11,7467                                      | -0,36%         |
| 95%-Quantil<br>VaR 5% | 13,5365                    | 13,5352                                      | -0,01%         |
| 99%-Quantil<br>VaR 1% | 17,2988                    | 17,1469                                      | -0,88%         |
| ES 5%                 | 15,8084                    | 15,7886                                      | -0,13%         |
| ES 1%                 | 19,0562                    | 19,1350                                      | 0,41%          |

## 5. Fallbeispiel 3

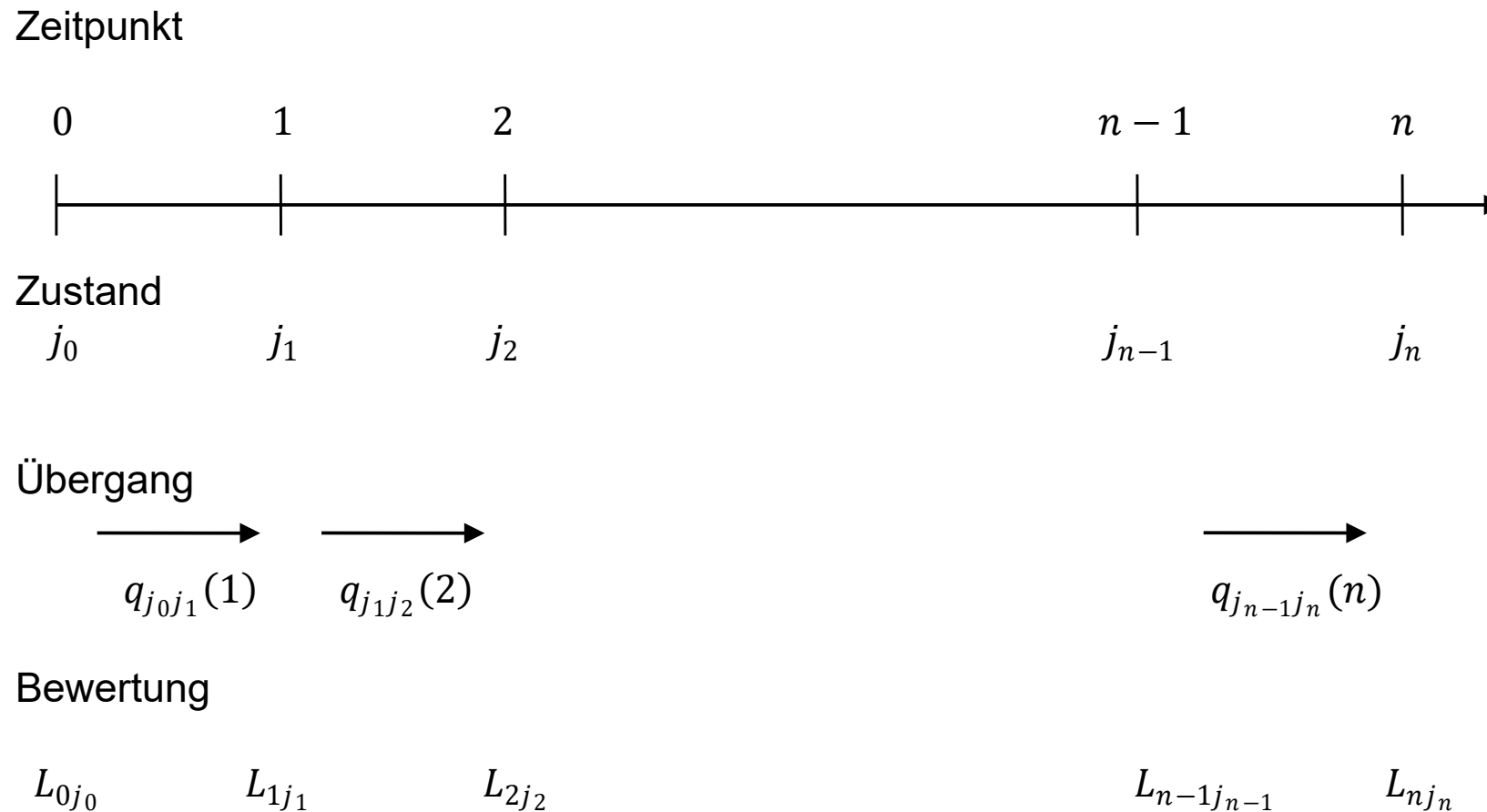
Bei einer bewerteten (zeitlich) inhomogenen Markov-Kette mit  $N + 1$  Zuständen und  $n + 1$  relevanten Zeitpunkten kann die charakteristische Funktion des Barwerts  $B$  der Bewertungen wie folgt berechnet werden:

$$\Phi(u) = E(e^{i \cdot u \cdot B}) = \sum_{j=0}^N \left( P_0 \cdot V(0, u) \cdot \prod_{t=1}^n (Q(t) \cdot V(t, u)) \right)_j, u \in \mathbb{R},$$

Dabei sei  $P_0$  die Anfangsverteilung auf den Zuständen,  $Q(t)$  die Übergangsmatrix vom Zeitpunkt  $t - 1$  zum Zeitpunkt  $t$  und  $V(t, u)$  eine aus der Bewertung zum Zeitpunkt  $t$  abgeleitete Diagonalmatrix.

(vgl. Knobloch, Ralf: *Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette* Forschung am IVW Köln 5/2015)

## 5. Fallbeispiel 3



## 5. Fallbeispiel 3

Anwendung: Personenversicherungsmathematik, betriebliche Altersversorgung, ...

Ziel: Aussagen über die Verteilung des Barwerts (z.B. einer Pensionszusage) und den zugehörigen Kennzahlen (Erwartungswert, Standardabweichung, Risikomaße)

Ausarbeitung: offen

## 5. Fazit und Ausblick

- Die vorgestellte Methodik, d.h. die Berechnung von Kennzahlen und Quantilen mithilfe der charakteristischen Funktion und numerischen Methoden, ist m.E. bei komplexen Risiko-Modellierungen eine gute Alternative zur Monte-Carlo-Simulation.
- Die Abweichungen zu den Ergebnissen einer Monte-Carlo-Simulation bewegen sich in den beiden dargestellten Fallbeispielen in der Größenordnung von üblichen numerischen Abweichungen.
- Es erscheint sinnvoll die vorgestellte Methodik auch auf noch komplexere Modellierungen anzuwenden. Voraussetzung dafür ist, dass die charakteristische Funktion der Zielgröße berechnet werden kann, z.B. bei der Modellierung einer Zusage auf betriebliche Altersversorgung mit einer bewerteten Markov-Kette.
- Auch die Anwendung auf ein Portfolio von stochastisch unabhängigen Risiken erscheint sinnvoll, da sich in diesem Fall die charakteristische Funktion der Summe der Verluste als Produkt der charakteristischen Funktionen der einzelnen Verluste ergibt.

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit