



Von großen Risiken und kleinsten Quadraten

Implementierung von LSMC in einem deutschen LVU

Christian Bettels
Johannes Fabrega

qx club Köln
01.04.2014

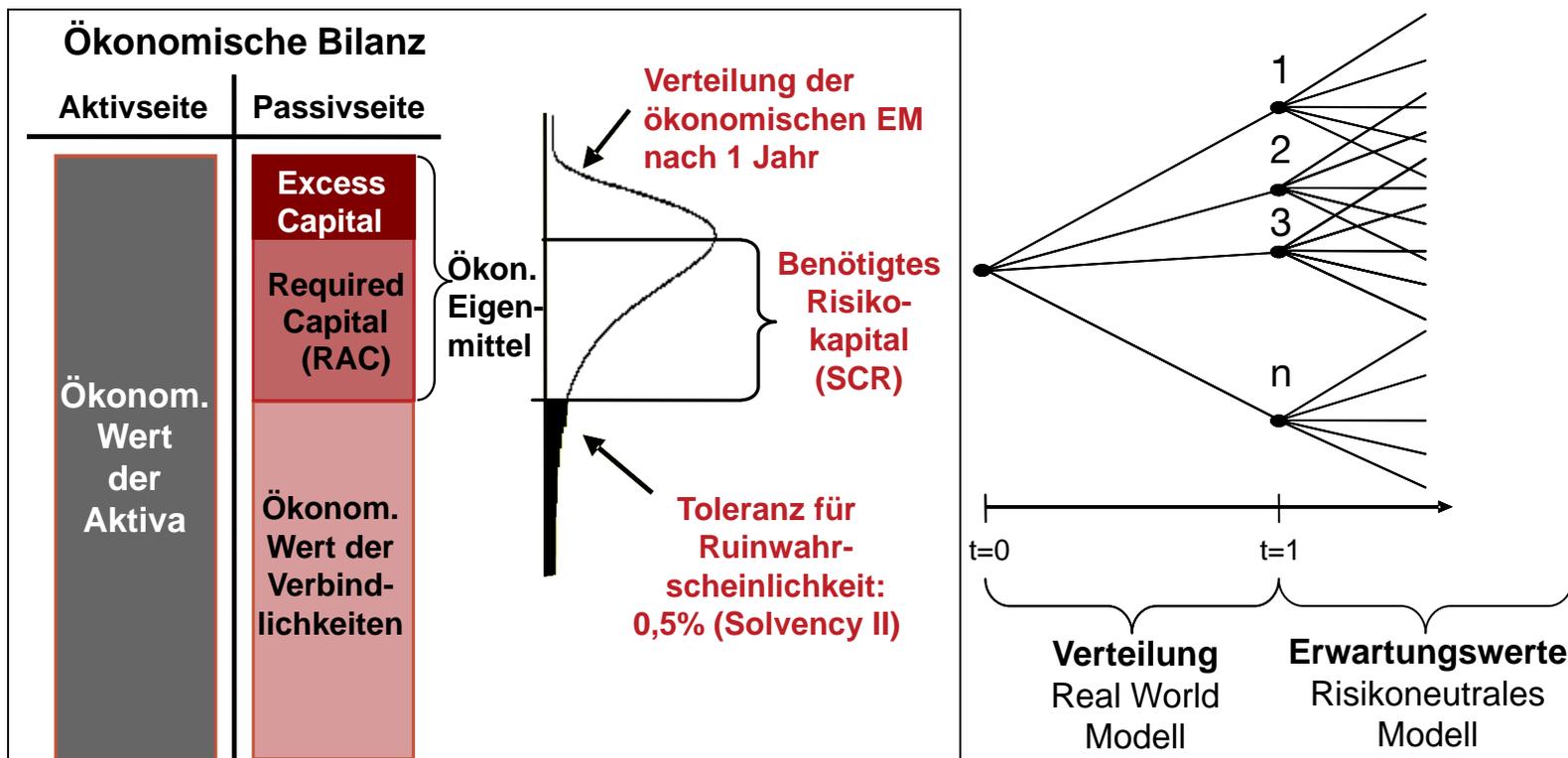


Agenda

- I. Einleitung und Motivation**
- II. LSMC Methodik und Technik
- III. Fallstudien
- IV. Zusammenfassung und Ausblick

Das benötigte Risikokapital unter Solvency II

Ermittlung des ökonomischen Risikokapitals in der Theorie



Die Solvenzkapitalanforderung ist direkt aus der Prognose der Wahrscheinlichkeitsverteilung (PDF) der Basiseigenmittel abzuleiten, die vom internen Modell des Unternehmens generiert wurde. Das Risikomaß ist der Value-at-Risk zu einem Konfidenzniveau von 99,5% über den Zeitraum eines Jahres (Art. 101 und 122 RRL).

Problem: „Stochastik in Stochastik“ => Näherungsansätze:

- Standardformel
- Replicating Portfolio
- Curve Fitting Techniques
- *Least Squares Monte Carlo (LSMC)*

Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose (PDF) EIOPA Guidelines zur Preapplication für Interne Modell

In den im Herbst 2013 veröffentlichten Guidelines und dem dazugehörigen Erläuterungstext wird die Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose (PDF) als **der** zentrale Output des Internen Modells herausgestellt. Dort werden sowohl der Mehrwert einer vollen Risikoverteilung

- Erlaubt einfache Berechnung **verschiedener Risikomaße** (z.B. Expected Shortfall)
- Ermöglicht tiefgehende Analyse des **Risikoprofils**
- Erleichtert die Berechnung von **Stresstests** und Szenarioanalysen
- Verschiedene RM Tools können auf verschiedene Quantile der Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose ausgerichtet werden

als auch Schwächen eines einzelnen Quantils oder weniger Quantilpunkte

- Risikominderungstechniken können den Tail jenseits bestimmter Quantile beeinflussen
- Definition von **Risikolimiten** über einzelnen Punkt – was passiert links und rechts davon?
- Fehlanreize in **Kapitalallokation** (wurden Risiken nicht berücksichtigt?)
- **Modellvalidierung/Backtesting** – nur eingeschränkte Möglichkeiten

diskutiert.

Schöne Eigenschaften der LSMC Methodik (1/2)

Robustes Verfahren mit vielen Validierungsmöglichkeiten

Wir haben die LSMC Methodik nun 3 Jahre getestet und glauben, dass diese Technik zahlreiche wichtige Eigenschaften aufweist, die sie als Zielmethodik für die Erzeugung einer Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose in einem internen Modell unter Solvency II qualifizieren:

- **Konsistente** und simultane **Behandlung von Markt-, Kredit und versicherungstechnischen Risiken** innerhalb des selben Verfahrens
- Höchst **effiziente Nutzung** eines gegebenen **Szenarienbudgets** für die stochastischen Berechnungen (praktische Restriktion: Laufzeit der Simulationsmodelle !)
- **Automatisierbarkeit** des gesamten Prozesses, von der Szenarienerzeugung bis zum Auswerten der Proxyfunktionen
- **Einfache Auswertung** der Proxyfunktionen (z.B. Polynomauswertung in Excel) und damit flexibel und schnell einsetzbar für Analysen
- Möglichkeit einer (statistisch) fundierten **Validierung**; graphische Analysen in beliebigen (auch kombinierten) Risikotreiberdimensionen; out of sample tests, Konfidenzintervalle, Fehlerabschätzungen
- Vergleichsweise **wenig Expert Judgement** erforderlich im Prozess; transparente Kommunikation der Annahmen möglich

Schöne Eigenschaften der LSMC Methodik (2/2)

Viele weitere Anwendungsmöglichkeiten im Solvency II Kontext

Eine große Stärke der LSMC Technik liegt in den zahlreichen weiteren Anwendungsmöglichkeiten im Solvency II Kontext über die 1y PDF Fragestellung hinaus, die eine gezielte Nutzung des internen Modells für Analysen möglich machen. Wir haben unter anderem folgende erweiterte Anwendungen getestet:

- Modellvalidierung: Effiziente und schnelle Schätzung von Parametersensitivitäten und Quantifizierung des Einflusses geänderter Parameter/Modellinputs auf die Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose und ökonomische Kennzahlen:
 - Parameter der Managementregeln des stochastischen Modells wie z.B. die langfristige ZQ, Parameter des dyn. VN Verhaltens
 - Annahmen der strategischen Asset-Allokation für die Projektion (z.B. Aktienquoten, Zieldurationen)
- Untersuchung der Auswirkung von “echten“ Entscheidungen auf die Solvency II Bedeckungsquote (Bsp. Höhe der RfB)
- Schnelle Schätzung von Einzel SCR's im Standardformelstil
- Projektion von Kapitalanforderungen (z.B. im ORSA Kontext) durch Verallgemeinerung der Technik auf den Mehrjahresfall

Für die o.g. Analysen ist **keine Neuberechnung** des Modells notwendig, da die zusätzlichen Parameter direkt als Funktionsargumente aufgenommen werden können.



Agenda

- I. Einleitung und Motivation
- II. LSMC Methodik und Technik**
- III. Fallstudien
- IV. Zusammenfassung und Ausblick

Bestimmung der Eigenmittelverteilung mit der LSMC-Methodik

Schritt 0: Definition der Approximierungsaufgabe

Vor der Kalibrierung und Auswertung der LSMC Proxy Funktionen sind folgende Fragestellungen zu beantworten:

- Wie groß ist das zur Verfügung stehende **Szenarienbudget**?
 - Laufzeit des stochastischen Modells in gegebener Hardwarearchitektur?
 - Wie viele Berechnungen sind nötig (Unternehmen, As-If-Betrachtungen, etc.)
 - Aufteilung des Szenarienbudgets für das Fitting und die Validierung, z.B. je 50.000 für Fitting und Validierung pro KU
 - Aufteilung des Szenariobudgets für das Fitting in äußere und innere Szenarien, z.B. 25.000 x 2
- Welche **Risikofaktoren** sollen in der LSMC Proxy Funktion berücksichtigt werden für die SCR Bestimmung und weitere Anwendungen?
 - Markt-, Kredit und versicherungstechnische Risiken
 - Zusätzliche Modellparameter?
 - Bsp. 11 Risikofaktoren und 1 weiterer Modellparameter (3 IR, Equity, Property, Credit, IR_VOL, EQ_VOL, Mortality, Longevity, Lapse, SH quota)
- Welche **Variable** soll mit der Proxy Funktion repliziert werden?
 - Bsp.: PVFP, BEL, MV Assets, Tax

Bestimmung der Eigenmittelverteilung mit der LSMC-Methodik

Schritt 1: Kalibrierung der Proxy Funktion

a

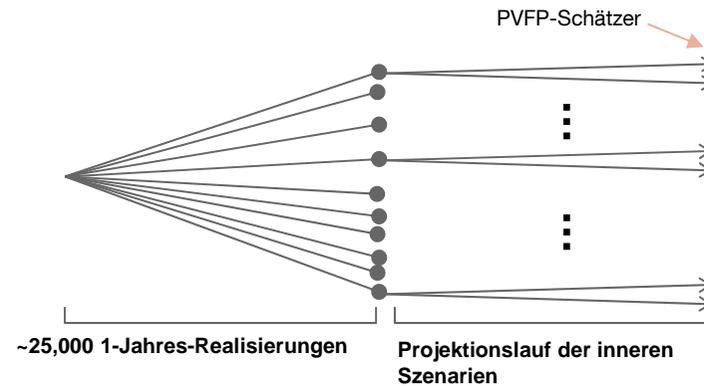
Erzeugung von Fittingszenarien:

- Große Zahl (~25,000) von möglichen 1-Jahres-Entwicklungen der Real World-Risikotreiber (*äußere* Szenarien)
- mit wenigen (z.B. 2) korrespondierenden Bewertungsszenarien (*innere* Szenarien)

Jedes äußere Szenario repräsentiert **kombinierte** Auslenkung aller Risikotreiber !

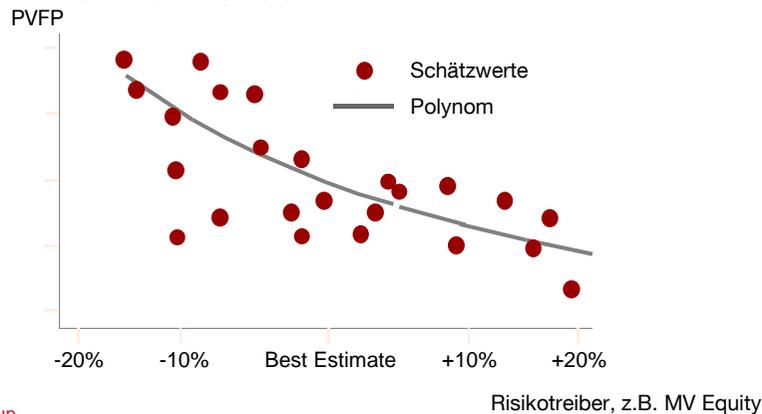
b

Berechnung der groben PVFP-Schätzer für jedes äußere Szenario mit dem ALM Modell



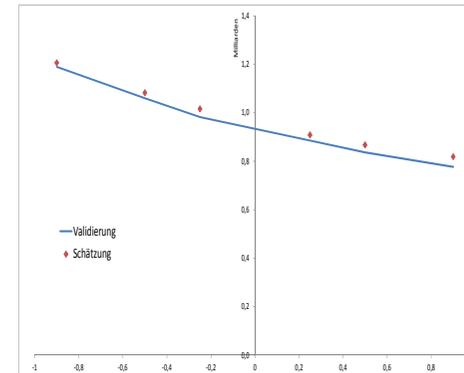
c

Regression : Kalibrierung eines multi-dimensionalen Polynoms, der "LSMC-Funktion" für den PVFP



d

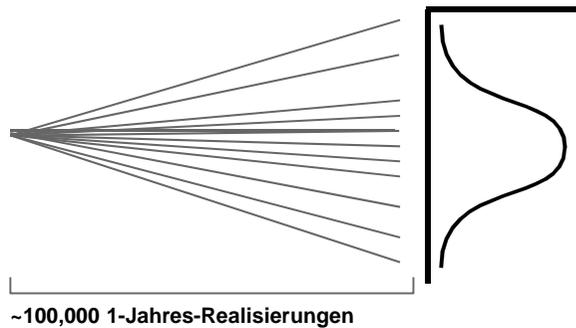
Validierung der LSMC-Funktion, z.B. graphische Analysen, out of sample tests,...



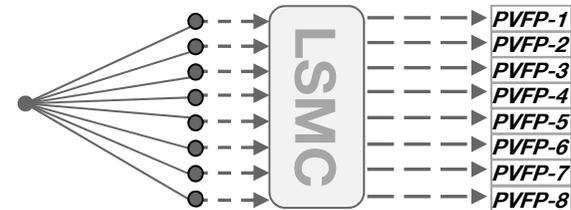
Bestimmung der Eigenmittelverteilung mit der LSMC-Methodik

Schritt 2: Auswertung der Proxy Funktion

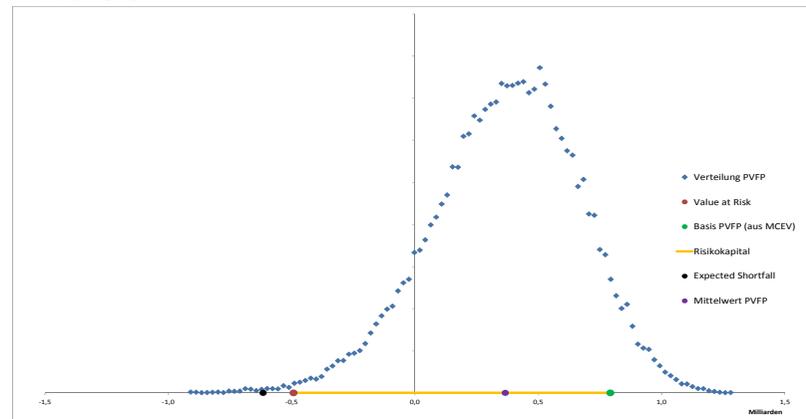
a Simulation der gemeinsamen Risikotreiberverteilung



b Auswertung der LSMC-Funktion mit bel. Anzahl von RW Realisierungen



c Bestimmung der Eigenmittelverteilung und Ermittlung des SCR





Agenda

- I. Einleitung und Motivation
- II. LSMC Methodik und Technik
- III. Fallstudien**
- IV. Zusammenfassung und Ausblick

LSMC Fallstudie

12 verschiedene Risikotreiber in einer Proxy Funktion

Wir haben unsere ersten Fallstudien ausgebaut und Schritt für Schritt konsistent zu den Risikotreibern unseres gegenwärtigen IM ausgestaltet. Im Jahr 2014 wurde erstmals eine Polynomfunktion generiert und validiert, die exemplarisch den Einfluss von 12 verschiedenen Risikotreibern auf den Unternehmenswert und die BEL abbildet.

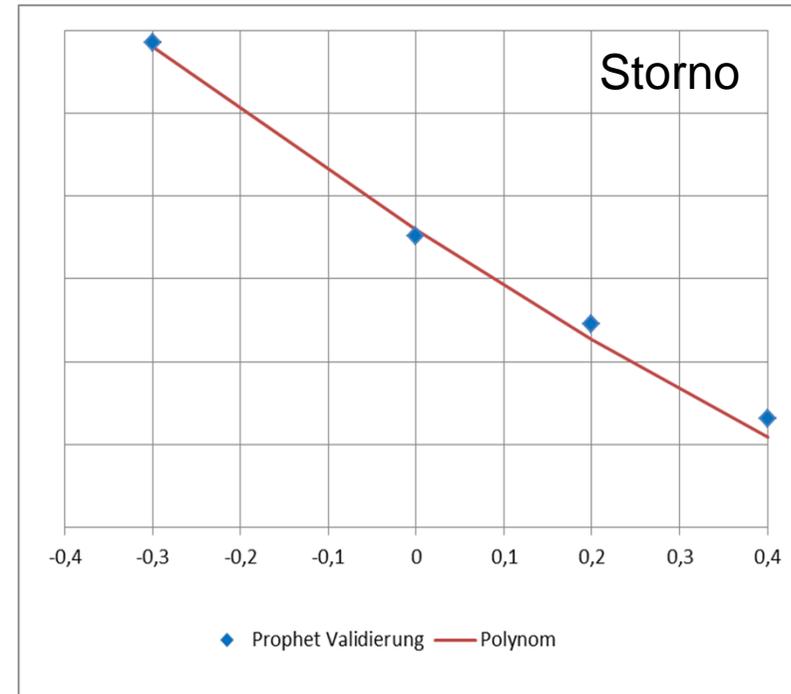
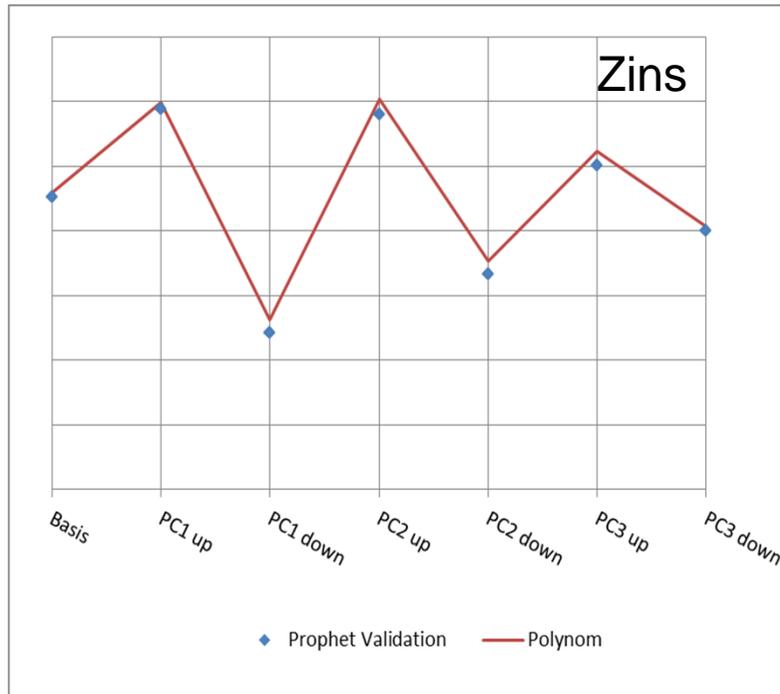
Dabei wurden die folgenden Risikotreiber berücksichtigt:

- Ein **dreidimensionaler Schock der Startzinskurve** (PC1 – PC3)
- Die Änderung der **Zinsvolatilität**
- Ein **Marktwertstress der Aktien** zu Projektionsbeginn und die Änderung der **Aktienvolatilität**
- Ein **Marktwertstress der Immobilien** zu Projektionsbeginn
- Ein initialer Marktwertstress der Anleihen, um einen **Kreditrisikostress** abzubilden
- Ein **Sterblichkeitsstress** während der Projektion und ein **CAT-Stress** im ersten Projektionsjahr
- Ein **Langlebigkeits-** und ein **Stornostress**

Für die Kalibrierung wurde ein Satz aus 25.000 äußeren mit jeweils 2 inneren Fittingszenarien verwendet. Es wurden zwei Regressionen durchgeführt, um eine LSMC Proxy Funktion sowohl für den PVFP als auch für die BEL zu erhalten.

Validierung in einzelnen Risikotreibern (1/2)

Einfluss Zins und Storno auf den PVFP

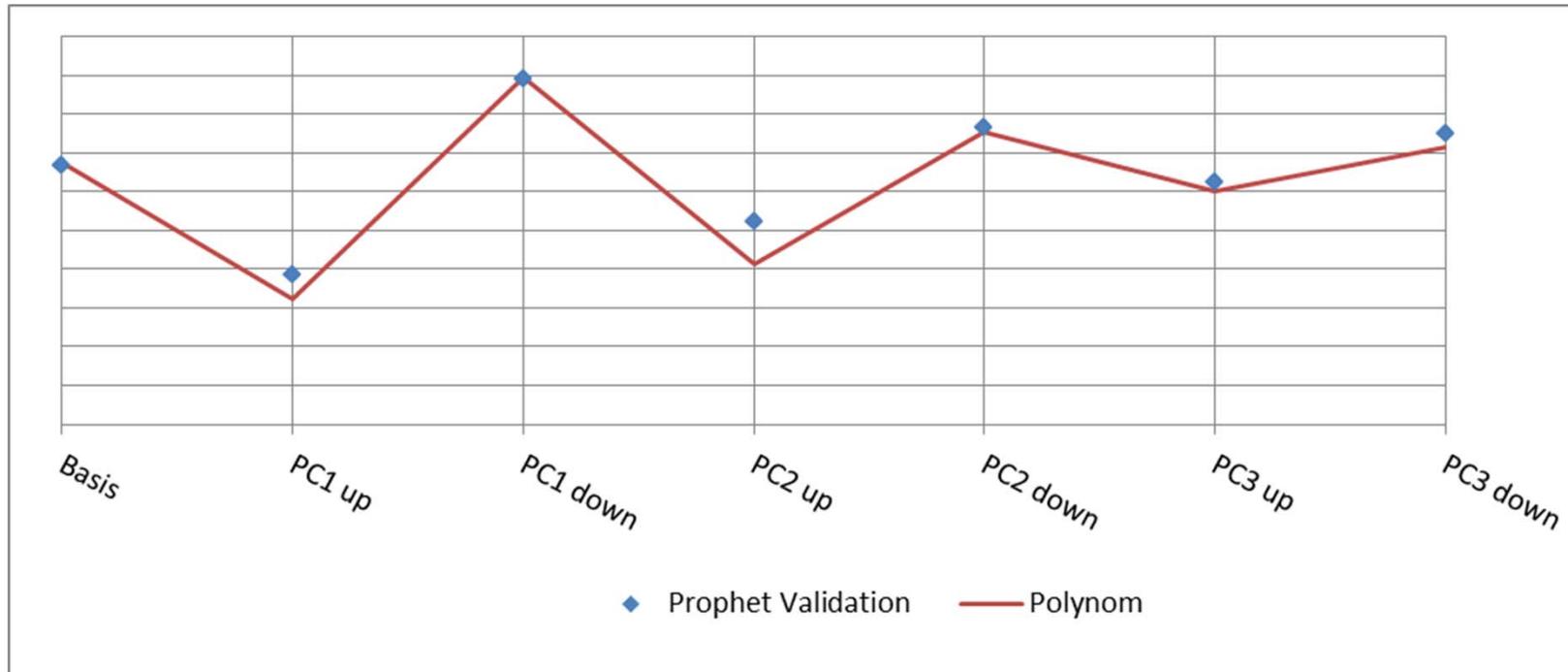


Zur Validierung der Regression werden die mit Hilfe des Polynom geschätzten Werte mit Ergebnissen von vollen stochastischen Läufen des Unternehmensmodells verglichen (out of sample tests):

- Sowohl unter Markt- als auch unter versicherungstechnischen Stressen liefert das Polynom einen guten Schätzer für den Unternehmenswert
- Der Einfluss der einzelnen Zinskomponenten wird sehr genau abgebildet
- Selbst für sehr hohe bzw. sehr niedrige Stornoraten ist das Polynom in der Lage den Unternehmenswert zu replizieren

Validierung in einzelnen Risikotreibern (2/2)

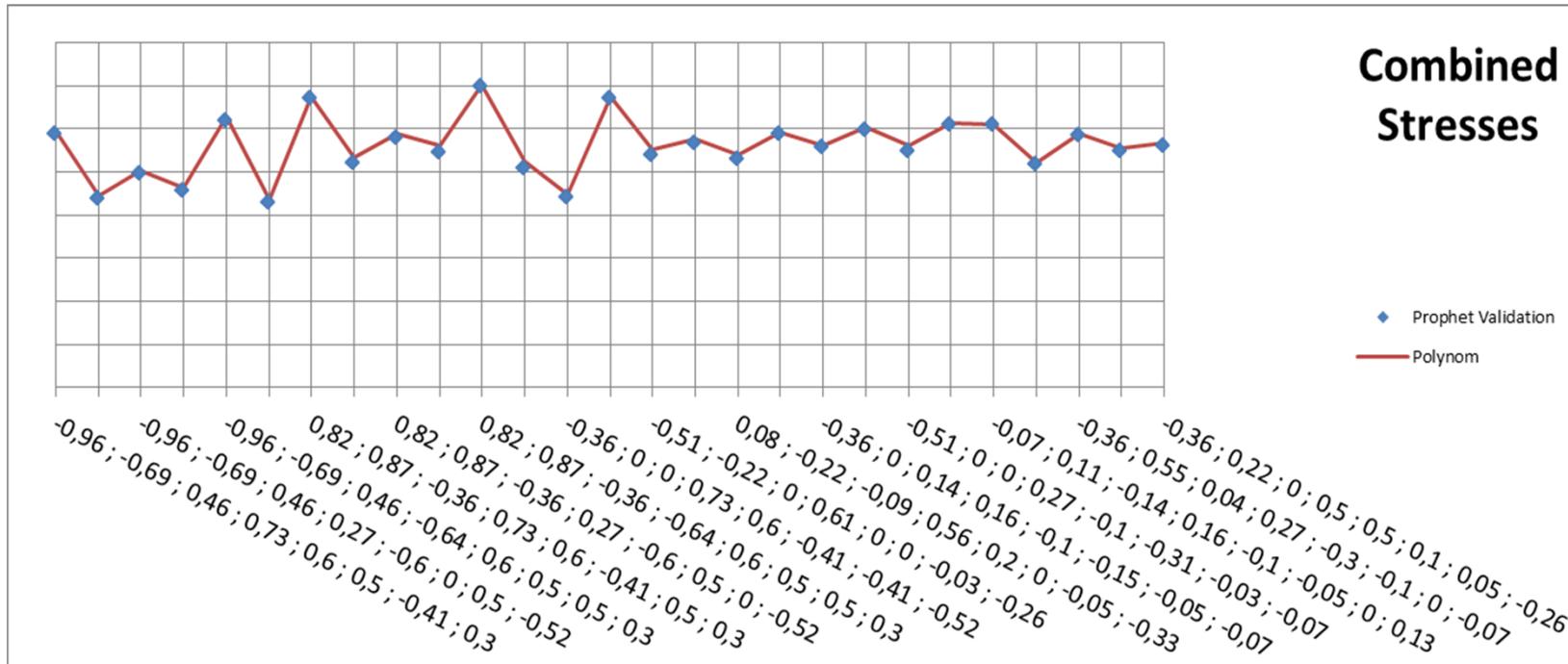
Einfluss Zins auf die BEL



Ebenso wie den PVFP kann man auch die BEL als Zielgröße für die Regression verwenden:

- Auch der Einfluss der verschiedenen Zinsstresse auf die BEL kann mit LSMC gut abgebildet werden
- Hat man bereits für den PVFP eine Schätzfunktion bestimmt, so kann man mit geringem Aufwand auch eine Funktion für die BEL oder andere Größen kalibrieren, da der Fitting Lauf **nicht** wiederholt werden muss

Validierung in kombinierten Risikotreibern Einfluss auf den PVFP



Anstatt nur die Werte jeweils eines einzigen Risikotreibers auszulenken, können auch mehrere Risikotreiber zugleich variiert werden (im Bsp. simultane Auslenkung von 8 Marktrisikotreibern). Auch die kombinierten Stresse lassen sich validieren, indem zur Risikotreiberposition ein voller stochastischer Lauf durchgeführt wird

- Die Abweichungen sind vergleichbar mit der Validierung einzelner Stresse
- Hier können extremere Szenarien vorkommen als bei einzelnen Stresse (Bsp. Zins Up + Zins Vola)

Sensitivitäten mit LSMC

Einfluss der Start-RfB auf den Unternehmenswert (1/3)

Eine mächtige Anwendung der LSMC Technik bietet die **Analyse von Sensitivitäten** des Modells. Als erstes Beispiel dient hier eine Untersuchung, wie sich der Unternehmenswert und insbesondere die Risikotragfähigkeit des Unternehmens mit der Höhe der RfB zum Projektionsbeginn verändert.

- Um für diese Sensitivitäten die LSMC Methodik zu verwenden, muss man lediglich die Höhe der RfB zu Projektionsbeginn **geeignet parametrisieren** (der Wert wird ohnehin tabellarisch vorgegeben)
- Dieser Parameter kann nun für jedes äußere Szenario innerhalb eines gewissen Ranges **skaliert** werden
- Dieser Skalierungsfaktor wird als zusätzlicher „**Risikofaktor**“ (neben Markt- und VT- Risiken) aufgenommen

- Man erhält damit aus der Regression ein **eine erweiterte Proxy Funktion**:

$$PVFP = f(\text{Marktrisikotreiber}, \text{VT-Risikotreiber}, \text{Start-RfB})$$

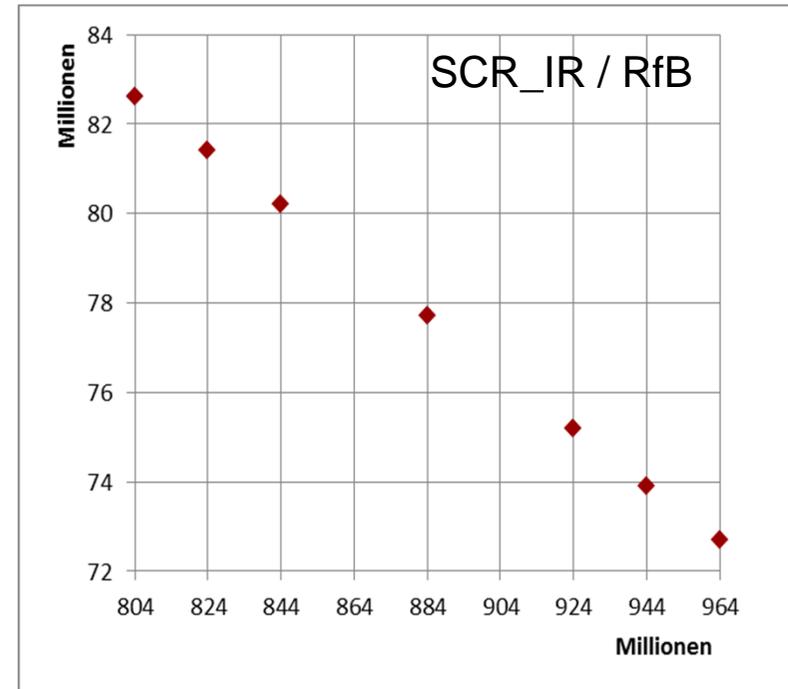
$$[\text{bzw. BEL} = f(\text{Marktrisikotreiber}, \text{VT-Risikotreiber}, \text{Start-RfB})]$$

- Mit dieser Proxy Funktion kann man also insbesondere **für jede Kombination von Stressen der Risikotreiber** die Abhängigkeit des Unternehmenswertes von der Start RfB darstellen

Sensitivitäten mit LSMC

Einfluss der Start-RfB auf den Unternehmenswert (2/3)

RfB zu Projektionsbeginn	PVFP base	PVFP IR stress	SCR_IR
804 Mio.	288,4 Mio.	205,8 Mio.	82,6 Mio.
824 Mio.	294,4 Mio.	213,0 Mio.	81,4 Mio.
844 Mio.	300,4 Mio.	220,2 Mio.	80,2 Mio.
884 Mio.	312,4 Mio.	234,7 Mio.	77,7 Mio.
924 Mio.	324,3 Mio.	249,1 Mio.	75,2 Mio.
944 Mio.	330,3 Mio.	256,4 Mio.	73,9 Mio.
964 Mio.	336,3 Mio.	263,6 Mio.	72,7 Mio.

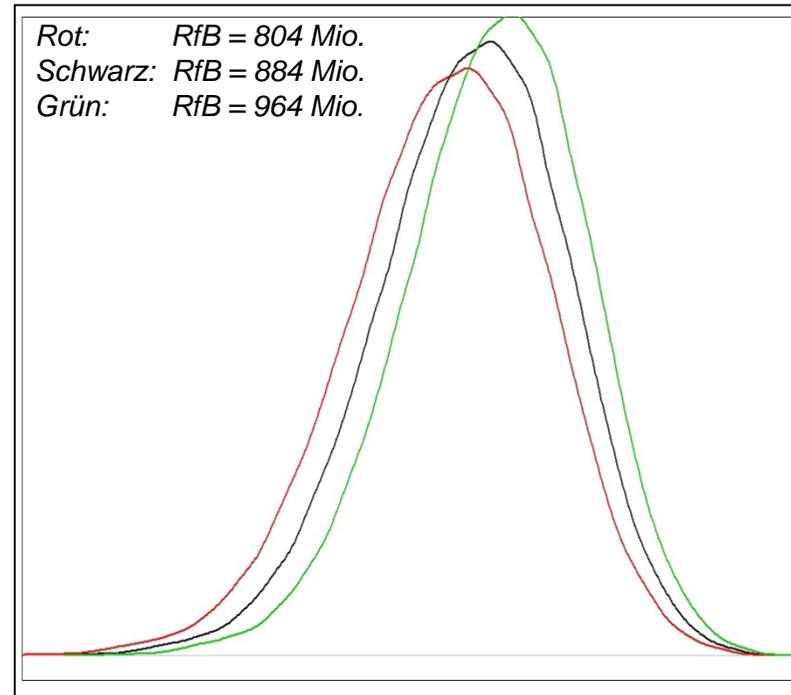


- Für einen gegebenen Zinsstress kann für **jeden Wert der RfB** zu Projektionsbeginn das **Zins-SCR** mit der Proxy Funktion bestimmt werden
- Analog lässt sich ohne weiteren Aufwand **jedes Einzel-SCR** für die berücksichtigten Risikotreiber schätzen
- So lässt sich ein Gesamt SCR im Standardformelstil ableiten
- In diesem Beispiel erkennt man einen linearen Zusammenhang zwischen RfB und Zins-SCR

Sensitivitäten mit LSMC

Einfluss der Start-RfB auf den Unternehmenswert (3/3)

RfB	PVFP Base	VaR	Expected Shortfall	SCR
804 Mio.	288,4 Mio.	-228,7 Mio.	-267,2 Mio.	517,1 Mio.
884 Mio. (base)	312,4 Mio.	-186,8 Mio.	-227,3 Mio.	499,2 Mio.
964 Mio.	336,3 Mio.	-144,7 Mio.	-183,6 Mio.	481,0 Mio.



- Durch Einsetzen von Realisierungen einer gemeinsamen Verteilung der Risikotreiber erhält man eine **volle Risikoverteilung** des Unternehmenswertes für **jeden beliebigen Wert der RfB** innerhalb des Fitting Ranges
- Anhand dieser Verteilung lassen sich Risikomaße, wie der **VaR** und der **Expected Shortfall** bestimmen
- **Abhängigkeiten** zwischen den verschiedenen Risikotreibern werden (sofern in der gemeinsamen Verteilung enthalten) **automatisch berücksichtigt**

Sensitivitäten mit LSMC

Einfluss von Modellparametern auf den Unternehmenswert (1/4)

Beispiel : Aktionärsquote und max. dynamischer Stornofaktor - Basisbewertung

- PVFP unter einzelner und *kombinierter* Auslenkung der Parameter kann direkt mit Proxy Funktion geschätzt werden:

$PVFP = f(\text{Marktrisikotreiber, VT-Risikotreiber, MDL, SQ})$

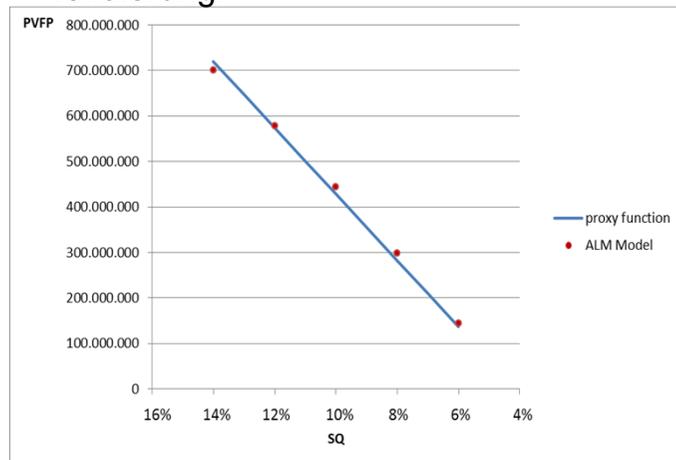
SQ (%)	PVFP Proxy Funktion
14	720.186.182
12	574.349.502
10	428.512.821
8	282.676.140
6	136.839.459

PVFP Schätzung in SQ-Dimension

MDL / SQ	14	12	10	8	6
1.2	793.834.732	647.998.051	502.161.371	356.324.690	210.488.009
1.5	766.216.526	620.379.845	474.543.164	328.706.484	182.869.803
2	720.186.182	574.349.502	428.512.821	282.676.140	136.839.459
2.5	674.155.839	528.319.158	382.482.477	236.645.796	90.809.115
2.8	646.537.632	500.700.952	354.864.271	209.027.590	63.190.909

PVFP Schätzung in MDL/SQ-Dimensionen

- Validierung:



Validierung in Auslenkung von SQ

MDL SQ	PVFP ALM model	PVFP Proxy function	rel. deviation
2.5 / 14	665.880.241	674.155.839	1.24%
2.8 / 14	645.008.160	646.537.632	0.24%
1.5 / 12	613.685.147	620.379.845	1.09%
2.2 / 12	564.967.415	555.937.364	-1.60%
1.5 / 8	325.306.287	328.706.484	1.05%

Validierung kombinierter Auslenkungen von MDL und SQ

Sensitivitäten mit LSMC

Einfluss von Modellparametern auf den Unternehmenswert (2/4)

Beispiel : Aktionärsquote und max. dynamischer Stornofaktor – Einfluss auf SCR

- Möglichkeit A : Standard Formel Ansatz: Schätze den PVFP im Basisfall und in Stressen für bestimmte Parameterkombinationen mit der Proxy Funktion. Berechne einzelne Kapitalanforderungen und aggregiere diese mit einem Korrelationsansatz.

- Beispiel: SCR_IR

MDL/SQ	14	10	6
1.2	202.131.973	182.152.728	162.173.483
2.0	197.509.610	177.530.365	157.551.120
2.8	192.887.247	172.908.002	152.928.757

- Beispiel: SCR_Credit:

MDL/SQ	14	10	6
1.2	321.447.286	312.289.972	303.132.658
2.0	317.049.875	307.892.561	298.735.247
2.8	312.652.463	303.495.149	294.337.835

- Möglichkeit B: Werte die Proxy Funktion mit einem Satz RW Realisierungen der Risikotreiber aus, wobei die Parameterdimensionen auf einen bestimmten Wert fixiert werden. Es resultiert die volle PVFP Verteilung in der gewählten Parameterumgebung und beliebige Quantile und das SCR können bestimmt werden.

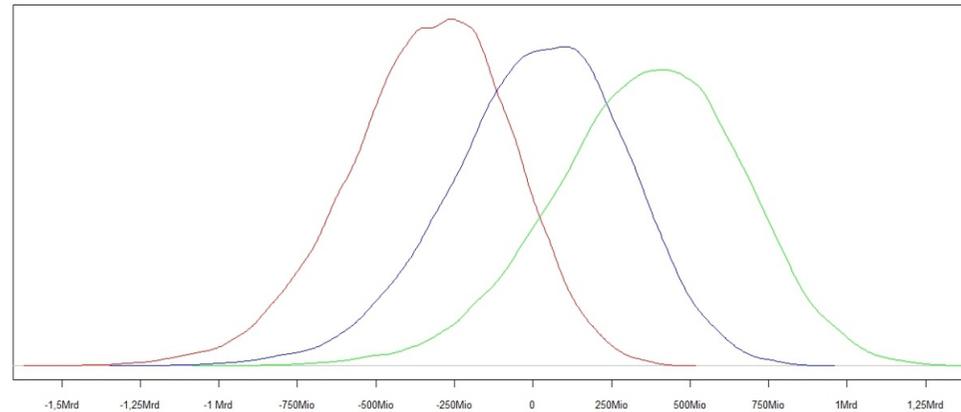
- $SCR = PVFP_{base} - q_{0.995} (PVFP\text{-Verteilung})$

Sensitivitäten mit LSMC

Einfluss von Modellparametern auf den Unternehmenswert (3/4)

Beispiel : Aktionärsquote und max. dynamischer Stornofaktor – Einfluss auf SCR

Density of PVFP distribution - different displacements of MDL and SQ



MDL / SQ	PVFP_Base	VaR	Expected Shortfall	SCR
2.8 / 6	63.190.909	-1.110.946.773	-1.212.239.095	1.174.137.682
2.0 / 6	13.839.455	-1.057.202.717	-1.159.516.300	1.194.042.172
1.2 / 6	210.488.009	-1.001.442.843	-1.106.808.376	1.211.930.852
2.0 / 10	428.512.821	-815.086.131	-918.745.065	1.243.598.952
2.0 / 14	720.186.178	-571.249.128	-680.374.308	1.291.435.306
1.2 / 14	793.834.732	-517.689.576	-627.932.150	1.311.524.307

Sensitivitäten mit LSMC

Einfluss von Modellparametern auf den Unternehmenswert (4/4)

Beispiel : Sensitivitäten von SAA-Parametern - Basisbewertung

- PVFP unter Veränderung der SAA Parameter (hier: Aktienquote) kann direkt aus der Proxy Funktion ermittelt werden: Validierungsläufe wurden über den gesamten Fitting Range durchgeführt und zeigen, dass die Proxy Funktion vernünftige Schätzer produziert.

PVFP = f (Marktrisikotreiber, VT Risikotreiber, Aktienquote)

EBR_base + x%	PVFP ALM model	PVFP proxy function	Deviation
-100%	326.580.591	333.266.988	2,05%
-50%	320.028.698	322.224.296	0,69%
-25%	316.891.049	316.702.950	-0,06%
0%	312.400.000	311.181.605	-0,39%
25%	306.958.114	305.660.260	-0,42%
50%	301.750.610	300.138.914	-0,53%
100%	290.730.242	289.096.223	-0,56%

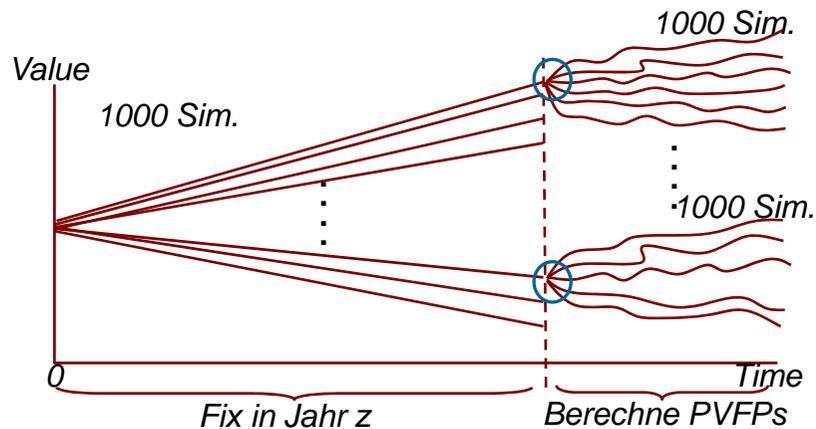
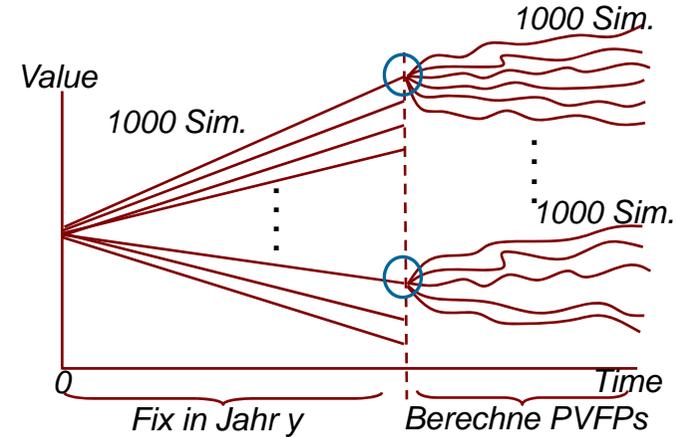
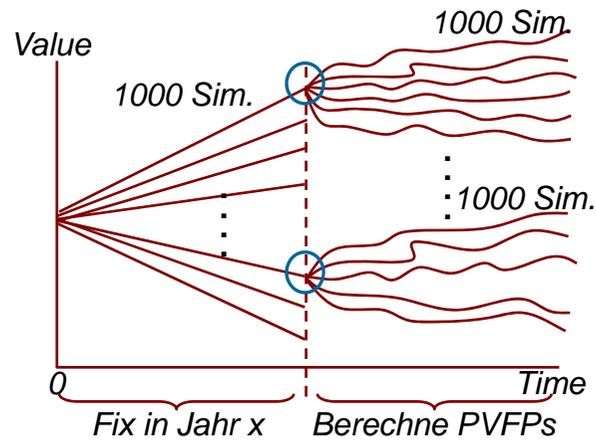
Erweiterte Anwendungen

Ausdehnung auf Mehrjahresfall

- In den vorliegenden Fallstudien betrachteten wir die LSMC Methode im Rahmen der PVFP Verteilung **nach einem Jahr**
- Ein stochastisches Model für MCEV / Solvency II ist für eine Projektion von 40+ Jahren ausgelegt
- Auch im Mehrjahresfall gibt es zahlreiche Herausforderungen im Solvency II Kontext
 - Mittelfristige Planung des ökonomischen Kapitals benötigt die Schätzung von Eigenmitteln / SCR für die Planungsperiode → ORSA
 - Managementregeln innerhalb der Bewertungsmodelle sollten die SII Bedeckungsquote angemessen beachten. Für diesen Zweck sollten zumindest Schätzungen für die Solvency II Bedeckungsquote in der Projektion verfügbar sein (in verschiedenen Projektionsjahren / Simulationen)
- **Idee:**
 - Verwende den selben Fittinglauf wie für die 1y VaR Anwendung
 - Führe Kalibrierung der PFVP Funktion für mehrere zukünftige Projektionsjahre durch
 - Verwende „Stochastik in Stochastik“ für Validierungszwecke
 - Die Proxyfunktionen können direkt für Analysen verwendet werden oder in das ALM Modell für Bewertungsläufe übergeben und in der Projektion ausgewertet werden

Erweiterte Anwendung

Ausdehnung auf Mehrjahresfall – Validierung der MY Schätzungen



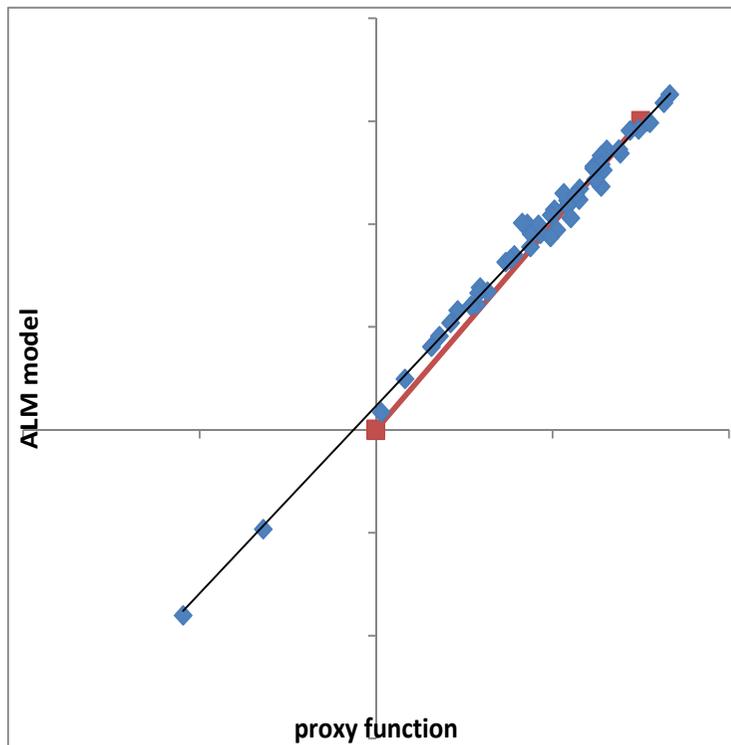
- „Exakte“ Werte mit Monte Carlo Simulation
- Die Zustandsvektoren für die Auswertung der Schätzfunktion entsprechen den Werten der erklärenden Variablen in den blauen Kreisen

Erweiterte Anwendung

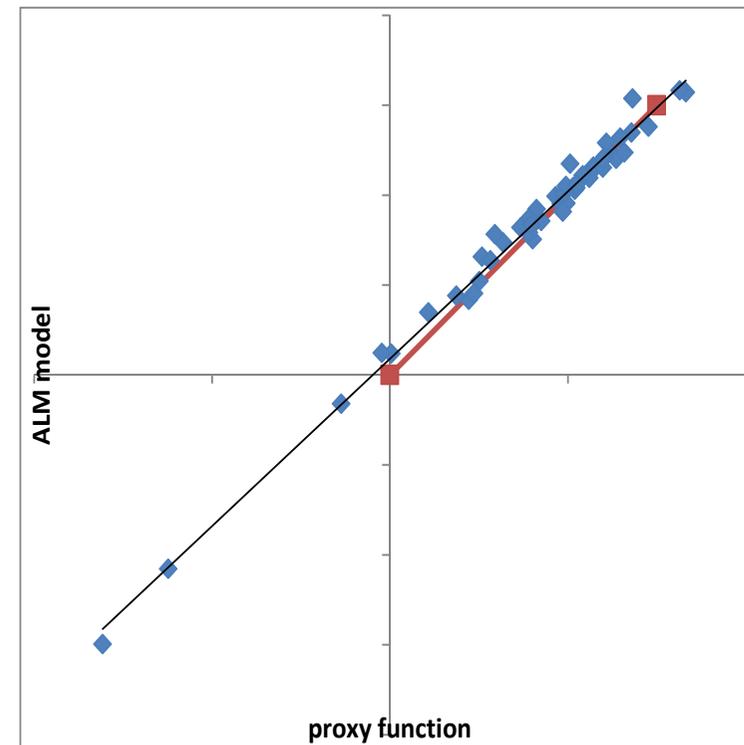
Ausdehnung auf Mehrjahresfall – Validierung der MY Schätzungen

- Vergleich von mit dem ALM Modell berechneten PVFP's und Schätzungen der Proxy Funktion

Projektionsjahr 1



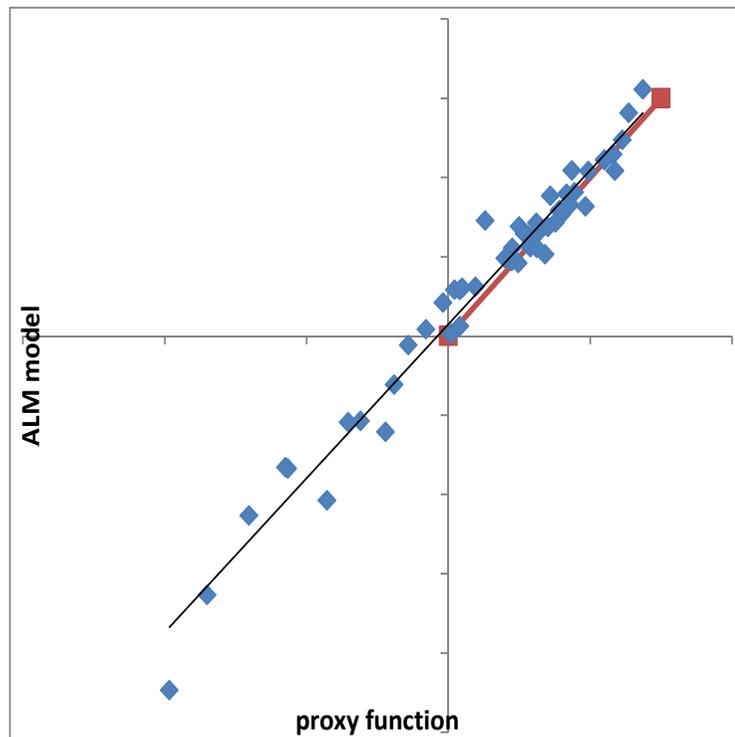
Projektionsjahr 2



Erweiterte Anwendung

Ausdehnung auf Mehrjahresfall – Validierung der MY Schätzungen

Projektionsjahr 10





Agenda

- I. Einleitung und Motivation
- II. LSMC Methodik und Technik
- III. Fallstudien
- IV. Zusammenfassung und Ausblick**

Zusammenfassung und Ausblick

Fazit:

- Die Generierung einer Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose der Eigenmittel für ein deutsches LVU kann mit der LSMC Technik vollumfänglich in einem robusten Verfahren mit zahlreichen Validierungsmöglichkeiten dargestellt werden
- Wir halten die LSMC Methodik für sehr mächtig, insbesondere aufgrund der flexiblen Erweiterungsmöglichkeiten für verschiedene Anwendungen, die es „umsonst“ dazu gibt
- Die Generali Gruppe implementiert LSMC als Zielmethodik für das IM unter Solvency II
 - LSMC für alle Länder im Geltungsbereich des IM

Ausblick:

Weitere interessante Anwendungsmöglichkeiten der LSMC Technik:

- Mehrjahresanwendungen:
 - Projektion von Kapitalanforderungen durch Verallgemeinerung auf den Mehrjahresfall
→ wichtig im ORSA/FLAOR Kontext

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit !

Christian Bettels – christian.bettels@generali.de
Johannes Fabrega – johannes.fabrega@generali.de