Der Shapley-Wert im neuen Licht

Ein Methodik-Baukasten zur Allokation von Risikokapital

Dr. Matthias Land

Gothaer Allgemeine Versicherung AG

qx-Club Köln, 3. September 2013

Inhalt

- Kapitalallokation
- Der Shapley-Wert
- Eigenschaften des Shapley-Wertes
- Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen
- Anwendung am Beispiel des SII-Standardmodells
- Fazit

Kapitalallokation – historische Wurzeln (1/6)

- Der Talmud: Zentraler Text des frühen rabbinischen Judentums (ab 70 n. Chr.); auf über 6.000 Seiten erstmals Rechtsgrundsätze in Schriftform, die zuvor nur mündlich übermittelt wurden.

- Erste bekannte Quelle, die rechtlich Klarheit schaffen soll hinsichtlich der Frage der Verteilung knapper Güter.

- Der Talmud gibt konkrete Beispiele, die Raum für Interpretation lassen:

  - Das umstrittene Tuch
  - Die drei Witwen
  - usw.

Kapitalallokation – historische Wurzeln (2/6)

Die drei Witwen (Talmud, Traktat Ketubot 93a):

Ein Mann hinterlässt drei Witwen. Zu Lebzeiten hat er vertraglich festgelegt, dass diese zum Anlass seines Todes 100, 200 und 300 Zuz aus seinem Nachlass erhalten sollen. Doch der Nachlass reicht nicht aus, um jede der drei Witwen vollumfänglich zu versorgen.

Der Talmud formuliert, wie der Nachlass aufzuteilen ist:

Nachlass	Ansprüche		
	100	200	300
100	33 1/3	33 1/3	33 1/3
200	50	75	75
300	50	100	150

Die Lösung enthält

- den Gleichverteilungs-Ansatz
- den proportionalen Ansatz als Extremfälle, aber auch
- einen scheinbar willkürlichen dritten Ansatz

Kapitalallokation – historische Wurzeln (3/6)

Israel Robert John Aumann, geboren 1930, Mathematiker deutscher Abstammung mit israelischer und US-amerikanischer Staatsbürger-schaft, Wirtschaftsnobelpreis 2004
©Rama

Aumann hat gezeigt:

- Den 3 Lösungen des Talmud liegt eine einheitliche Verteilungsregel zugrunde *(Aumann & Maschler 1985)*.
- Regel basiert auf nachvollzieh-barem Verständnis über die Fairness von Schiedsverfahren.
- Regel basiert auf Grundprinzip des Shapley-Wertes *(Aumann 2010)*.

Kapitalallokation – historische Wurzeln (4/6)

Die Allokation von Risikokapital auf Geschäftsfelder obliegt dem Top-Management. Es handelt sich um ein strategisches Thema, das lange Zeit weitgehend ohne Mathematik ausgekommen ist.

Heute nutzen wir mathematische Allokationsverfahren im Zusammenhang mit:

- Analyse von Risiko-Rendite-Relationen
- Identifikation der Risikotreiber
- Quantitativer Unterlegung strategischer Geschäftsfeldausrichtungen
- Bemessung der Management-Vergütung
- Prämienkalkulation usw.

Kapitalallokation – historische Wurzeln (5/6)

Zahlreiche Verfahren sind vorgeschlagen worden.

Eine Auswahl:

- Proportionale Allokation
- Marginale Allokation nach Merton
- Kovarianzverfahren
- Implizite Allokationen (TVAR, EIOPA – Annex J)
- Shapley-Verfahren

Die Diskussion um das optimale Verfahren wurde vor ca. zehn Jahren intensiv geführt und ist unfruchtbar geblieben.

Kapitalallokation – historische Wurzeln (6/6)

Shapley-Verfahren galten als schwer umsetzbar und litten unter fehlender Kohärenz.

Der Vortrag stellt neue Varianten des Shapley-Verfahrens vor, die im Stile eines Baukasten-Ansatzes

- flexibel auf Unternehmens- und Risikostrukturen angepasst werden können,
- deutlich weniger Rechenkapazität erfordern und
- praxisnah begründbar sind.

Lloyd Shapley, geboren 1923,
US-amerikanischer Wirtschaftswissenschaftler und Mathematiker, Wirtschaftsnobelpreis 2012
©Bengt Nyman

Inhalt

- Kapitalallokation
- Der Shapley-Wert
- Eigenschaften des Shapley-Wertes
- Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen
- Anwendung am Beispiel des SII-Standardmodells
- Fazit

Der Shapley-Wert – Einführung (1/5)

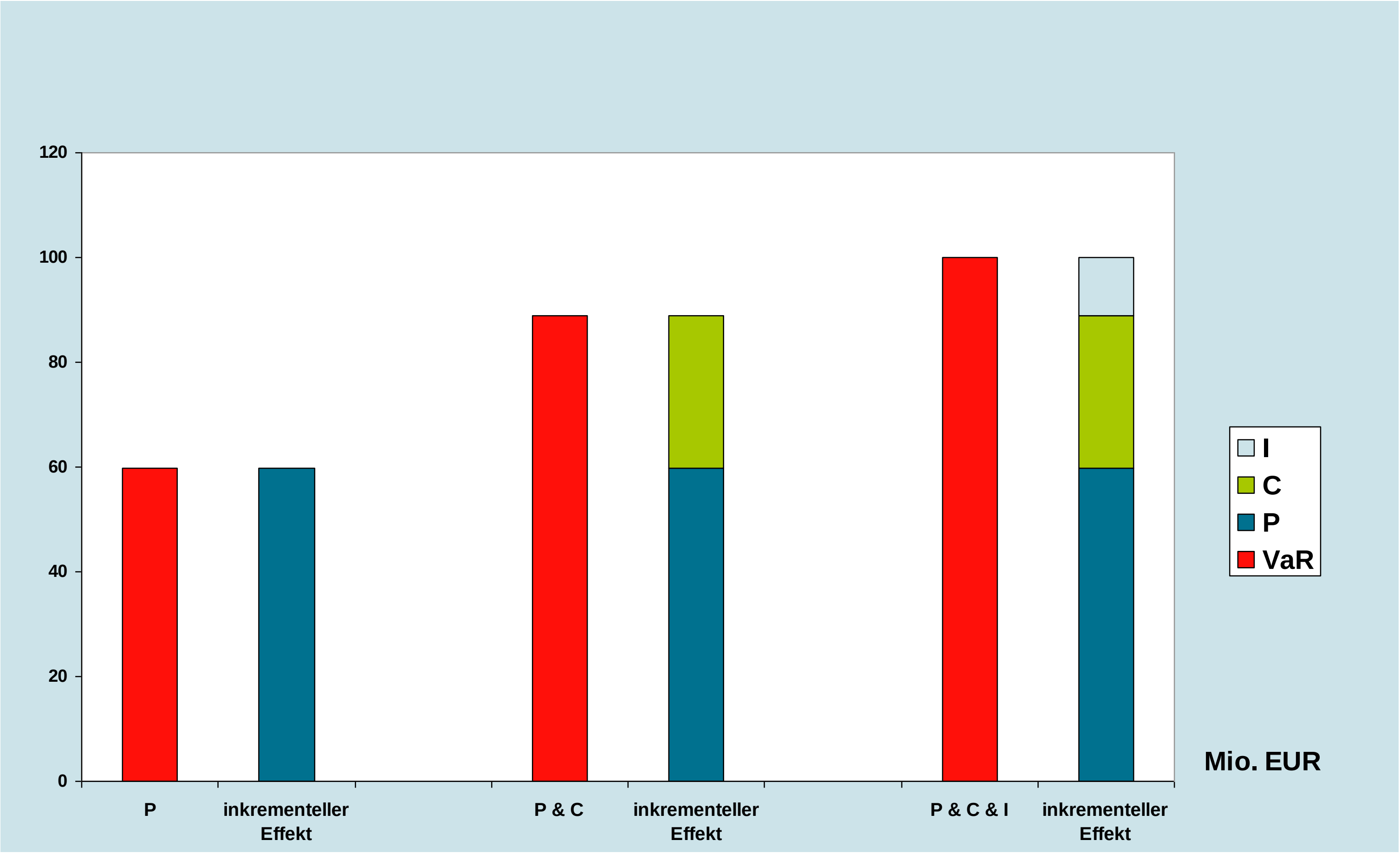
Einfaches Einführungsbeispiel:

Drei Lines of Business (LoB) eines Schaden-/Unfall-Versicherungsunternehmens und ihre versicherungstechnischen Risikokapitalerfordernisse gemäß eines internen Modells:

LoB		VaR - 0.5% (netto, Mio. EUR)	TVaR - 0.5% (netto, Mio. EUR)
P (Private Lines)	einzeln	60	112
C (Commercial Lines)		54	65
I (Industrial Lines)		27	34
P & C	kombiniert	89	157
P & I		73	134
C & I		64	81
P & C & I	gesamthaft	100	178

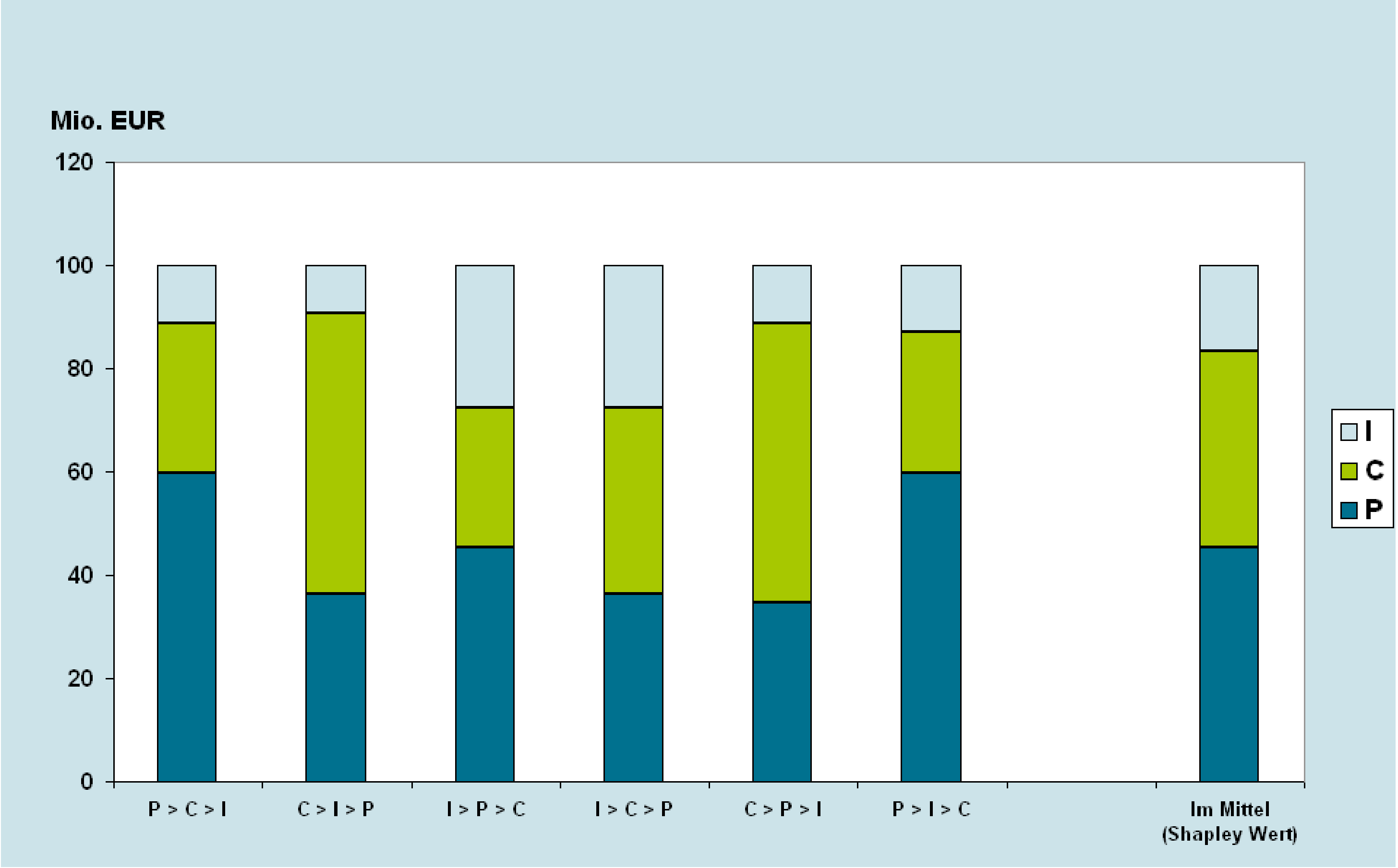
Der Shapley-Wert – Einführung (2/5)

Sequentielle Allokation von Risikokapital durch sukzessive Einbeziehung der LoBs am Beispiel der Reihenfolge P>C>I:



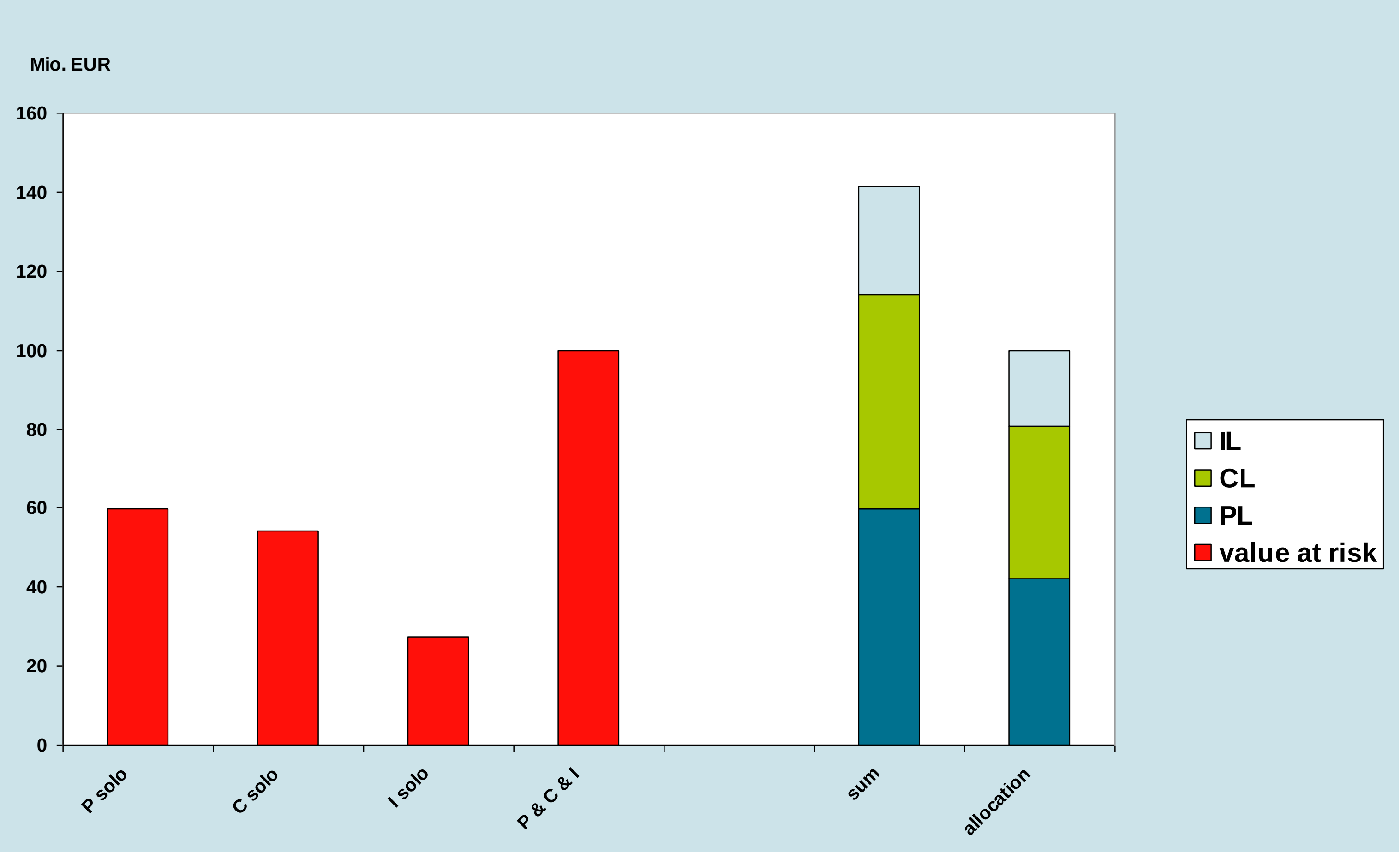
Der Shapley-Wert – Einführung (3/5)

Der Shapley-Wert ergibt sich als Mittelwert der sequentiellen Allokationen über allen Reihenfolgen:



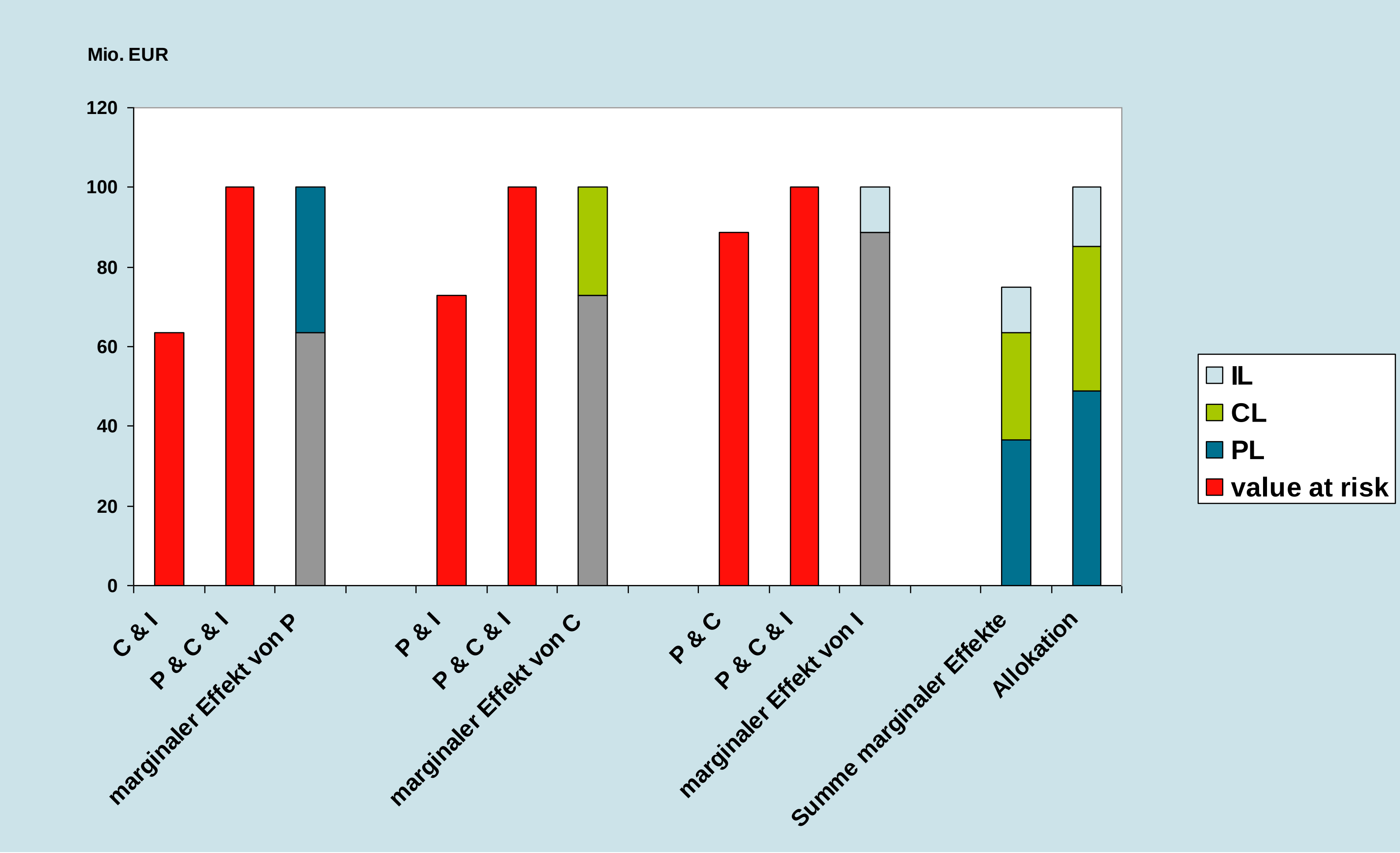
Der Shapley-Wert – Einführung (4/5)

Alternative: Proportionale Allokation



Der Shapley-Wert – Einführung (5/5)

Alternative: Marginale Allokation



Der Shapley-Wert – Formale Darstellung (1/5)

- Die Indizes 1, …, n stehen für die Allokationseinheiten.
  Das können LoBs sein, aber auch Risikokategorien.

- Die Menge {1,…,n} beschreibt die Gesamtheit aller Einheiten.

- Die Menge $\wp(\{1,\ldots,n\})$ bezeichnet man als Potenzmenge.
  Sie umfasst alle möglichen Kombinationen von Einheiten.

Der Shapley-Wert – Formale Darstellung (2/5)

Eine Funktion R: $\wp$({1,…,n})→$\mathbb{P}$ mit R(ø) = 0
nennen wir im folgenden eine *Risikofunktion*.

Die Menge all solcher Risikofunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_n$.

Risikofunktionen lassen sich tabellarisch darstellen:

Das Konzept hat nichts mit Risikomaßen zu tun. Zwar ergeben sich die Werte einer Risikofunktion häufig aus der Schätzung eines Risikomaßes aus konkreten Daten. Das muss aber nicht sein.

Der Shapley-Wert – Formale Darstellung (3/5)

Eine Abbildung Φ: $\mathcal{P}_n$ → P^n, die bezüglich jeder Risikofunktion R gerade Φ1(R)+…+ Φn(R)=R({1,…n}) erfüllt, nennen wir im folgenden ein n-dimensionales Allokationsverfahren.

Allokationsverfahren werden häufig anders definiert.
Dann ist das Risikomaß ein Teil des Allokationsverfahrens.
Hier ist es gegebenenfalls Teil der Risikofunktion (muss aber nicht).

Vorteil: So definierte Allokationsverfahren lassen sich auch in Situationen anwenden in denen es kein durchgängiges und einheitliches Risikomaß gibt (Standardmodell Solvency II).

Der Shapley-Wert – Formale Darstellung (4/5)

Bezeichnet P die Menge aller Permutationen der Einheiten, so ist der Shapley-Wert einer Risikofunktion R gerade:

$$\Phi_i(R) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in P} \left[R\left(\bigcup_{j=1}^{\pi^{-1}(i)} \{\pi(j)\} \right) - R\left(\bigcup_{j=1}^{\pi^{-1}(i)-1} \{\pi(j)\} \right) \right]$$

Oder gleichbedeutend:

$$\Phi_i(R) = \sum_{T \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \frac{|T|!(n-|T|-1)!}{n!} \left[R(T \cup \{i\}) - R(T) \right]$$

Der Shapley-Wert – Formale Darstellung (5/5)

Das Kovarianzprinzip geht aus der Kombination des Shapley-Wertes mit dem Risikomaß „Varianz“ hervor:

Wendet man den Shapley-Wert auf diese Risikofunktion an …

$$R(T) := \frac{Var\left(\sum_{i \in T} X_i\right)}{Var\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)} C \qquad \text{für} \qquad T \subset \{1, \ldots, n\}$$

ergibt sich für Einheit i der aus dem Kovarianzprinzip bekannte Anteil:

$$C_i := \frac{Cov\left(X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right)}{Var\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)}$$

Im allgemeinen wird man den Shapley-Wert aber in Verbindung mit VaR und TVaR anwenden.

Der Shapley-Wert – Licht und Schatten

Die Schattenseiten:

- Fehlende Kohärenz (Arzner, 1999)
- Aufwendige Berechnung (2^n Kombinationen von Einheiten sind auszuwerten)

Die Sonnenseiten:

- Kombinierbar mit Solvency II Risikomaß VaR
- Weniger empfindlich als TVaR
- Anwendbar auch ohne Risikomaß (Standardmodell)
- Stellt die faire Vergleichbarkeit von Einheiten und Szenarien sicher (s.u.)
- Ist flexibel an Modellstrukturen anpassbar (s.u.)

Weitere Eigenschaften hat Shapley formuliert: Additivität, Symmetrie, Dummy-Eigenschaft (Shapley, 1953).

Inhalt

- Kapitalallokation
- Der Shapley-Wert
- Eigenschaften des Shapley-Wertes
- Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen
- Anwendung am Beispiel des SII-Standardmodells
- Fazit

Eigenschaften
– Faire Vergleichbarkeit von Szenarien (1/7)

Beispiel: Analyse eines übergreifenden XL-Vertrags

LoB	VaR
1	50
2	10
3	10
1 & 2	55
2 & 3	15
3 & 1	55
1 & 2 & 3	80

Szenario 1: Brutto

	Allokation auf LoB		
	1	2	3
Shapley	53,3	13,3	13,3
Prop	57,1	11,4	11,4
Marginal	45,2	17,4	17,4

LoB	VaR
1	45
2	5
3	5
1 & 2	50
2 & 3	10
3 & 1	50
1 & 2 & 3	75

Szenario 2: Netto nach Rückversicherung

5 Mio. xs. 5 Mio. EUR
übergreifend über alle LoBs

	Allokation auf LoB		
	1	2	3
Shapley	51,7	11,7	11,7
Prop	61,4	6,8	6,8
Marginal	42,4	16,3	16,3

Eigenschaften
– Faire Vergleichbarkeit von Szenarien (2/7)

Im Beispiel wirkt die RV wie folgt auf Einheit 1:

- Stand-Alone-Risiko sinkt
- Alle kombinierten Risiken sinken
- Ausmaß des Anwachsens eines kombinierten Risikos durch Hinzunahme von Einheit 1 sinkt oder bleibt unverändert

Eigenschaften
– Faire Vergleichbarkeit von Szenarien (3/7)

Gothaer

Bei proportionaler Allokation steigt das LoB 1 zugeordnete Risikokapital trotzdem an

LoB	VaR
1	50
2	10
3	10
1 & 2	55
2 & 3	15
3 & 1	55
1 & 2 & 3	80

Szenario 1: Brutto

	Allokation auf LoB		
	1	2	3
Shapley	53,3	13,3	13,3
Prop	57,1	11,4	11,4
Marginal	45,2	17,4	17,4

LoB	VaR
1	45
2	5
3	5
1 & 2	50
2 & 3	10
3 & 1	50
1 & 2 & 3	75

Szenario 2: Netto nach Rückversicherung

5 Mio. xs. 5 Mio. EUR
übergreifend über alle LoBs

	Allokation auf LoB		
	1	2	3
Shapley	51,7	11,7	11,7
Prop	61,4	6,8	6,8
Marginal	42,4	16,3	16,3

Eigenschaften
– Faire Vergleichbarkeit von Szenarien (4/7)

Beispiel: Analyse eines anderen übergreifenden XL-Vertrags

LoB	VaR
1	50
2	10
3	10
1 & 2	55
2 & 3	15
3 & 1	55
1 & 2 & 3	80

Szenario 1: Brutto (unverändert)			
Shapley	53,3	13,3	13,3
Prop	57,1	11,4	11,4
Marginal	45,2	17,4	17,4

LoB	VaR
1	50
2	10
3	10
1 & 2	50
2 & 3	15
3 & 1	50
1 & 2 & 3	50

Szenario 2: Netto nach Rückversicherung (neu)

50 Mio. xs. 50 Mio. EUR
übergreifend über alle LoBs

Shapley	41,7	4,2	4,2
Prop	35,7	7,1	7,1
Marginal	50,0	0,0	0,0

Eigenschaften
– Faire Vergleichbarkeit von Szenarien (5/7)

Bei marginaler Allokation steigt das LoB 1 zugeordnete Risikokapital an

LoB	VaR
1	50
2	10
3	10
1 & 2	55
2 & 3	15
3 & 1	55
1 & 2 & 3	80

Szenario 1: Brutto (unverändert)

Shapley	53,3	13,3	13,3
Prop	57,1	11,4	11,4
Marginal	45,2	17,4	17,4

LoB	VaR
1	50
2	10
3	10
1 & 2	50
2 & 3	15
3 & 1	50
1 & 2 & 3	50

Szenario 2: Netto nach Rückversicherung (neu)

50 Mio. xs. 50 Mio. EUR
übergreifend über alle LoBs

Shapley	41,7	4,2	4,2
Prop	35,7	7,1	7,1
Marginal	50,0	0,0	0,0

Eigenschaften
– Faire Vergleichbarkeit von Szenarien (6/7)

In beiden Beispielen ist das Resultat verblüffend, denn:

$R_{brutto}(\{1\}) \geq R_{netto}(\{1\})$

Und sogar:

$R_{brutto}(\{1,2\}) - R_{brutto}(\{2\}) \geq R_{netto}(\{1,2\}) - R_{netto}(\{2\})$

$R_{brutto}(\{1,3\}) - R_{brutto}(\{3\}) \geq R_{netto}(\{1,3\}) - R_{netto}(\{3\})$

$R_{brutto}(\{1,2,3\}) - R_{brutto}(\{2,3\}) \geq R_{netto}(\{1,2,3\}) - R_{netto}(\{2,3\})$

Dennoch ergibt sich $\Phi_1 (R_{brutto}) < \Phi_1 (R_{netto})$.

Eigenschaften
– Faire Vergleichbarkeit von Szenarien (7/7)

Young (1985): Ein Allokationsverfahren Φ erfüllt die Bedingung der “fairen Vergleichbarkeit von Szenarien”, wenn für je zwei Risikofunktionen (Szenarien) R_1, R_2, und jede Einheit $i \in \{1,\ldots,n\}$ aus der Bedingung

$$R_1(T \cup \{i\}) - R_1(T) \geq R_2(T \cup \{i\}) - R_2(T) \quad \text{für alle } T \subseteq \{1,..,n\} \setminus \{i\}$$

bereits $\Phi_i(R_1) \geq \Phi_i(R_2)$ folgt.

Interpretation:

Trägt eine Einheit i in Szenario 1 mehr zum Risikokapital bei, als in Szenario 2, so wird dieses Ranking der Szenarien durch die Allokation nicht ins Gegenteil verzerrt.

Eigenschaften
– Faire Vergleichbarkeit von Einheiten

Ein Allokationsverfahren Φ erfüllt die Bedingung der “fairen Vergleich-barkeit von Einheiten”, wenn für jede Risikofunktion R und je zwei Einheiten $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ aus der Bedingung

$$R\,(\,T \cup \{\,i\}\,) \geq R\,(\,T \cup \{\,j\}\,) \text{ für alle } T \subseteq \{1,..,n\}\backslash\{i,j\}$$

bereits $\Phi_i\,(R) \geq \Phi_j\,(R)$ folgt.

Interpretation:

Trägt eine Einheit mehr zum Risikokapital bei, als eine andere, so wird dieses Ranking der Einheiten durch die Allokation nicht ins Gegenteil verzerrt.

Eigenschaften – Einzigartigkeit

Der Shapley-Wert erfüllt die Bedingungen der …

- fairen Vergleichbarkeit von Szenarien

- fairen Vergleichbarkeit von Einheiten

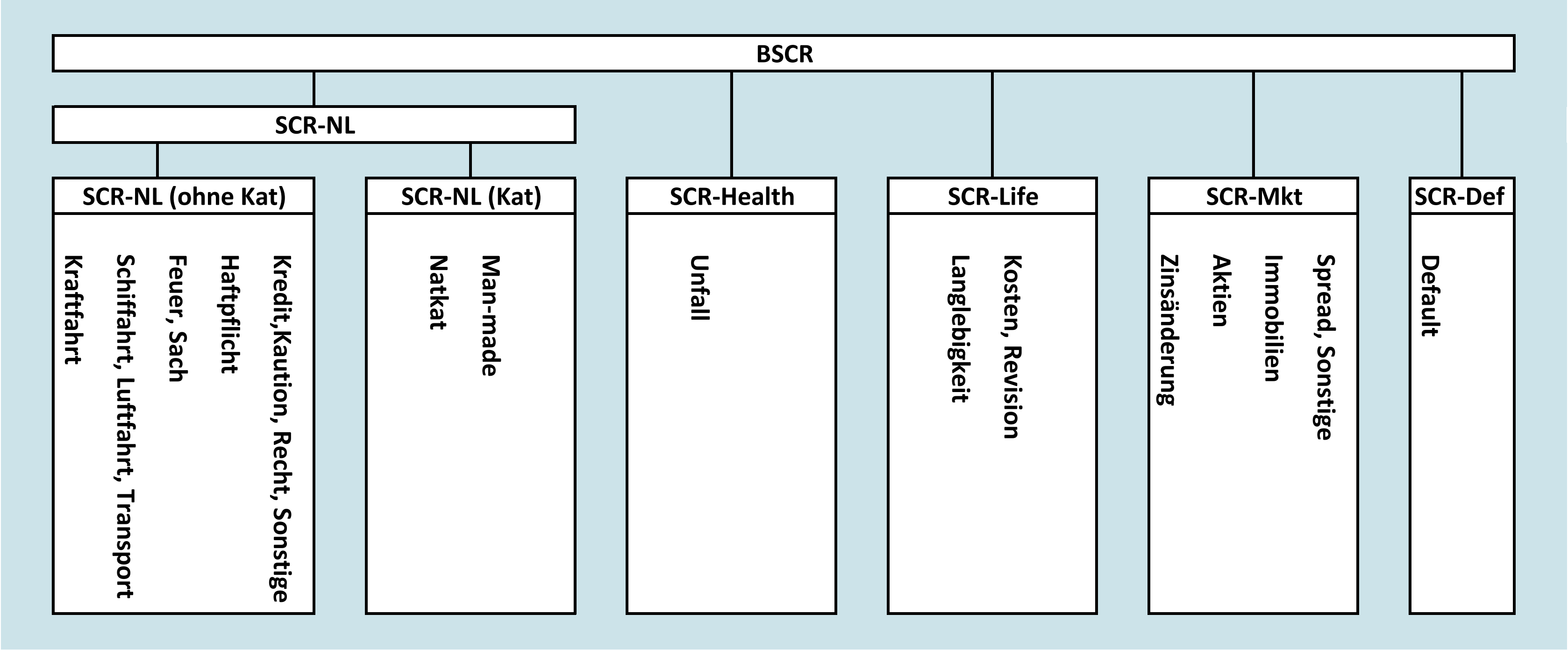
Es kann kein anderes Allokationsverfahren geben, das beide Eigenschaften zugleich besitzt (Land & Gefeller, 1999).

Inhalt

- Kapitalallokation
- Der Shapley-Wert
- Eigenschaften des Shapley-Wertes
- Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen
- Anwendung am Beispiel des SII-Standardmodells
- Fazit

Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (1/14)

Beispiel: Standardmodell in einem Schaden-/Unfallversicherungs-unternehmen



Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (2/14)

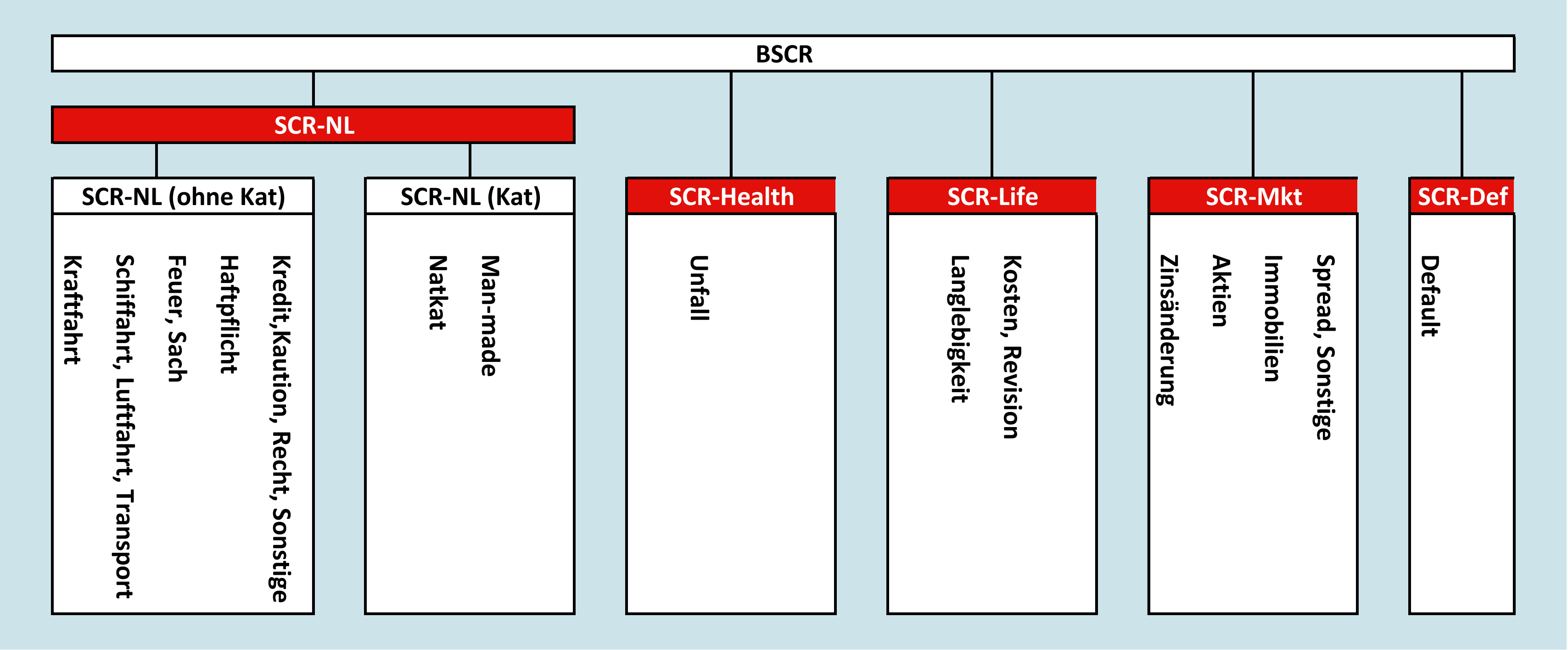
Berechnung des Shapley-Wertes für die 15 Unterkategorien ist problematisch:

- Es müssen $2^{15} - 1$ Kombinationen bezüglich des resultierenden SCRs ausgewertet werden. Nicht jede dieser Kombinationen ist überhaupt sinnvoll.
- Zwischensummen sind nicht zu interpretieren. Die Summe der 7 Shapley-Werte innerhalb NL stimmt nicht mit dem Shapley-Wert von NL als ganzes überein, wenn auf höherer Ebene allokiert wird. Das führt zu ganz praktischen Problemen, z.B. im Planungsprozess.

Lösungsvorschlag:
Bildung von Gruppen und Hierarchieklassen, etwa so …

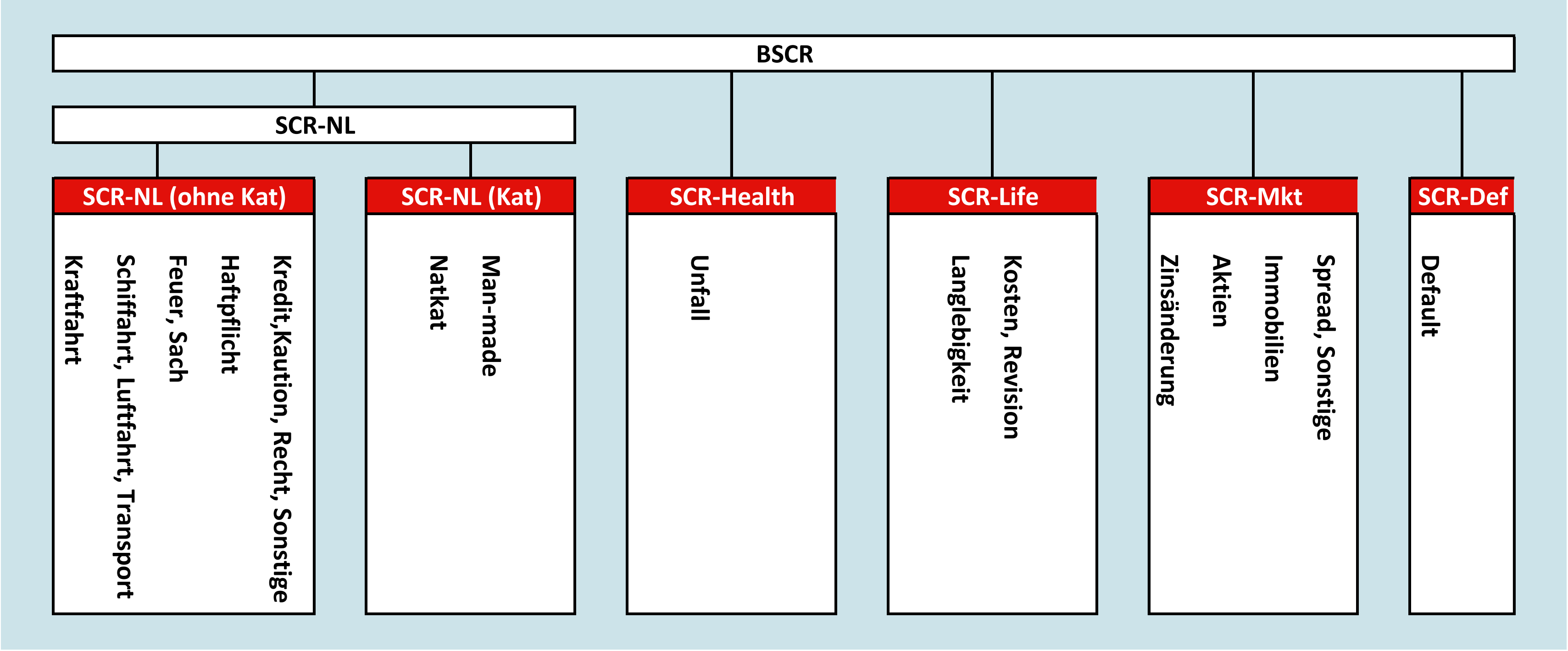
Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (3/14)

Zusammenfassung von 15 Einheiten zu 5 Gruppen



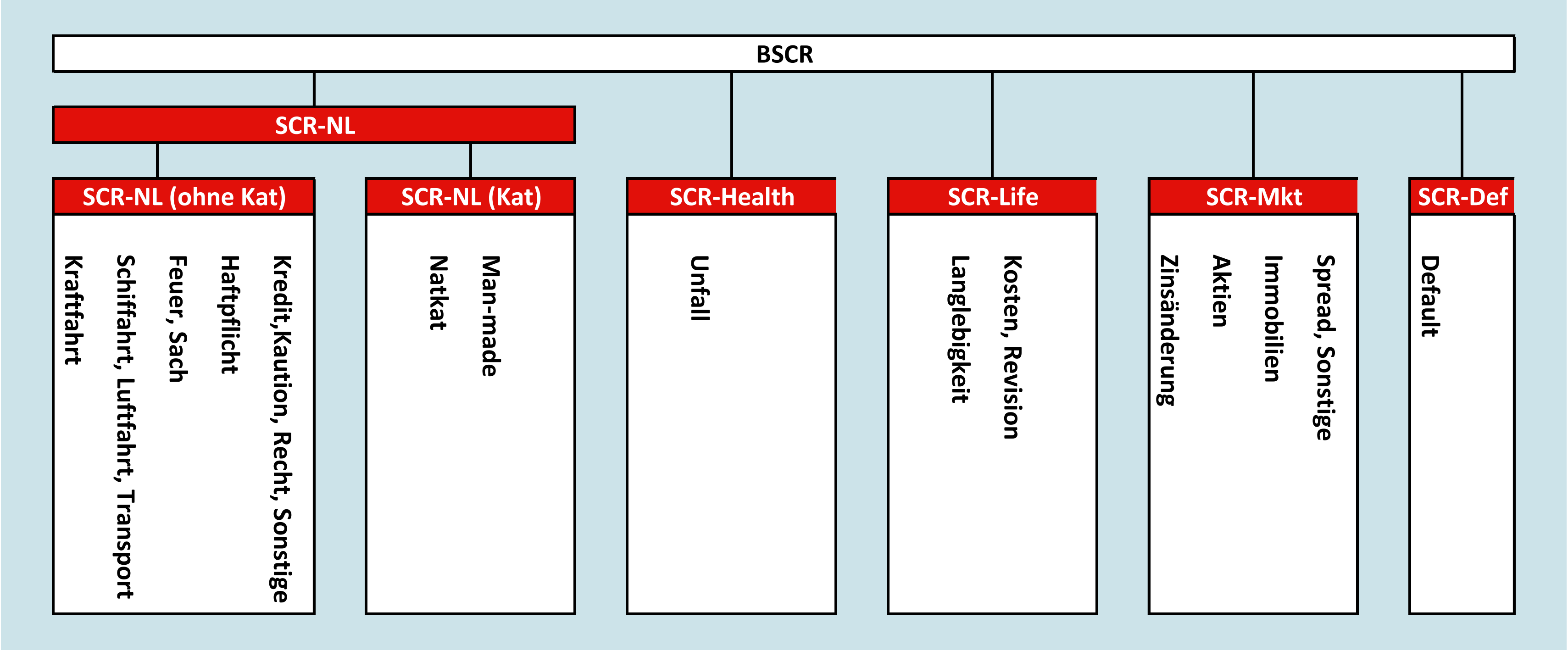
Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (4/14)

Oder so …



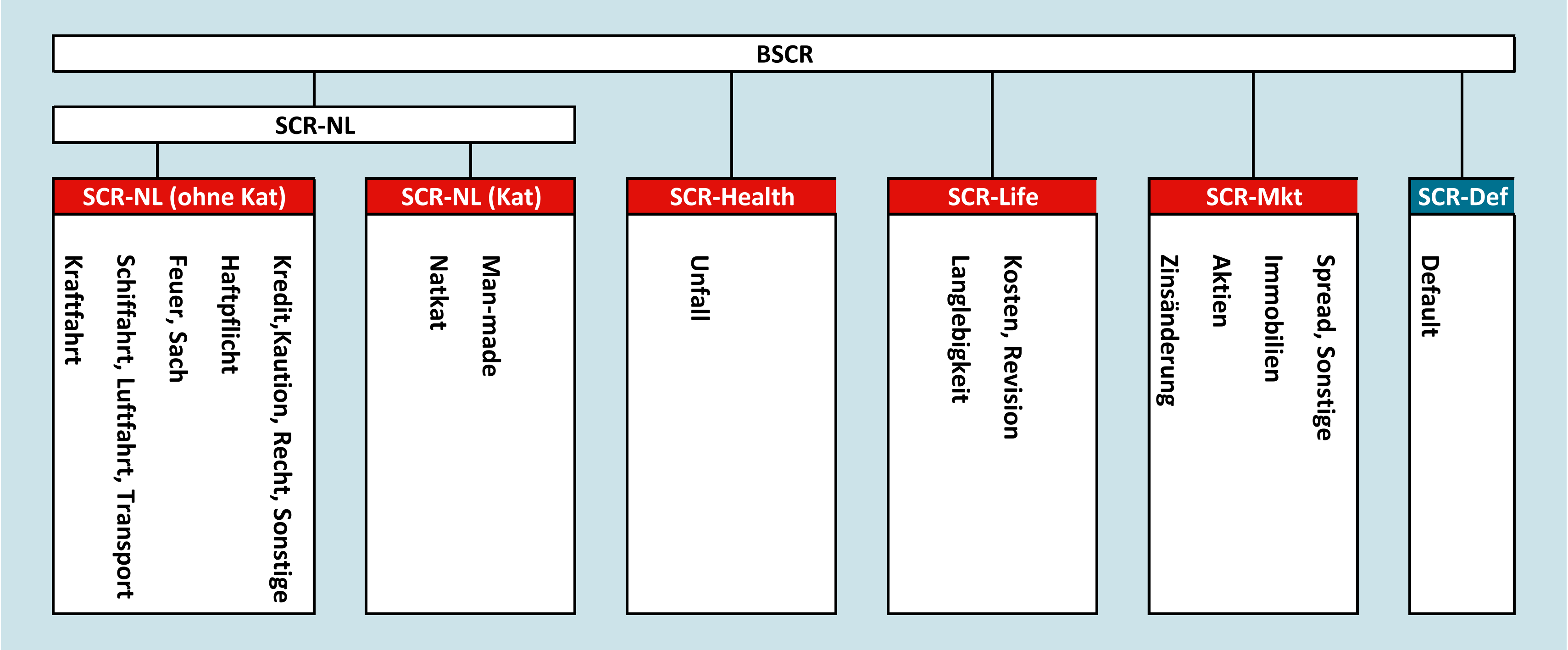
Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (5/14)

Oder mit Untergruppen …



Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (6/14)

Oder mit Default als hierarchisch nachgelagertem Risiko …



Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (7/14)

Der gruppierte Shapley-Wert

Gruppierung der Einheiten 1,…,n in disjunkte Teilmengen $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$ mit $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_k = \{1,\ldots,n\}$.

Eine Permutation von Einheiten heißt „gruppiert" bzgl $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$, wenn alle Einheiten einer Gruppe in der Permutation unmittelbar aufeinander folgen.

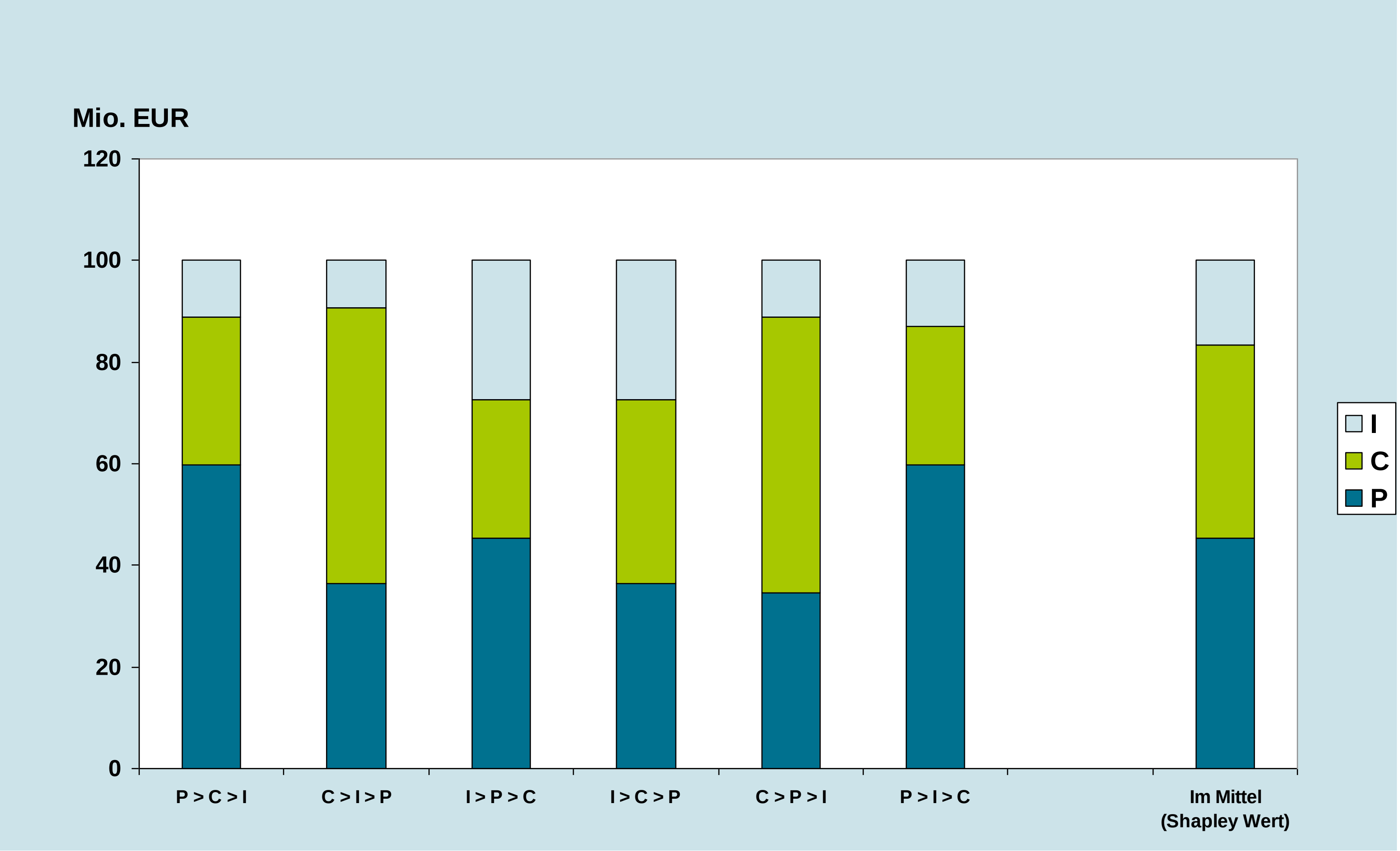
Bezeichnet P die Menge aller bezüglich $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$ gruppierten Permutationen der Einheiten, so ist der gruppierte Shapley-Wert einer Risikofunktion R gerade:

$$\Phi_i(R) := \frac{1}{\mathrm{k!g_1!...g_k!}} \sum_{\pi\in P} \left[R\left(\bigcup_{j=1}^{\pi^{-1}(i)} \{\pi(j)\} \right) - R\left(\bigcup_{j=1}^{\pi^{-1}(i)-1} \{\pi(j)\} \right) \right]$$

Dabei ist g_1 die Mächtigkeit der Gruppe Γ_1.

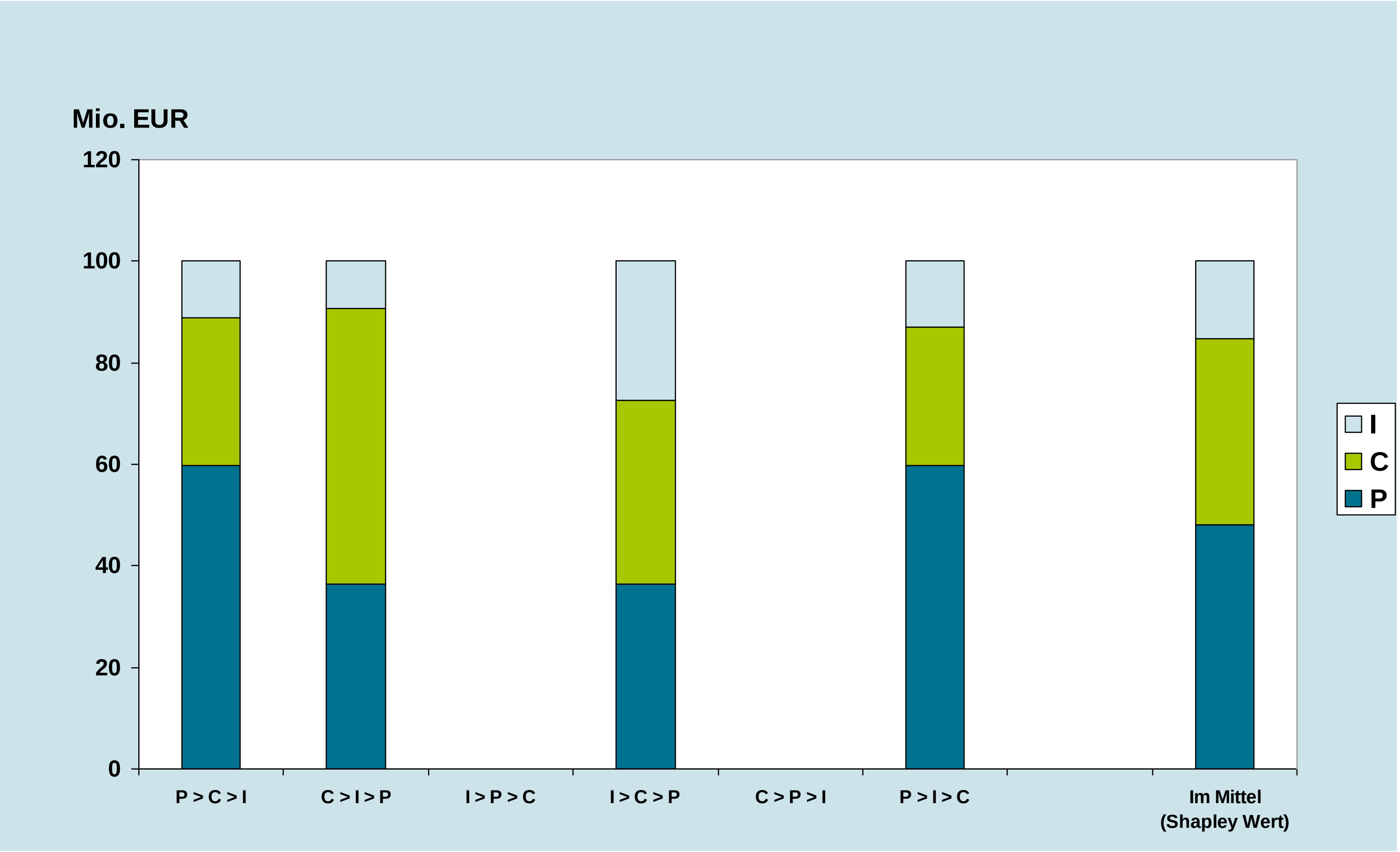
Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (8/14)

So sah unser Eingangsbeispiel ohne Gruppierung aus:



Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (9/14)

So sieht es aus nach Gruppierung in zwei Gruppen {P} und {C,I}:



Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (10/14)

Bei der Lösung des Beispiels der drei Witwen aus dem Talmud werden wir ähnlich vorgehen.
Mehr dazu später …

Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (11/14)

Der gruppierte Shapley-Wert kann im wirklichen Leben sein Potenzial erst in komplexen Strukturen ausleben.

Die Tabelle zeigt die Anzahl auszuwertender Kombinationen von Einheiten, wenn diese in Gruppen von je zwei bzw. vier Einheiten aufgeteilt werden:

Anzahl auszuwertender kombinierter Risikokapitalien			
		Gruppierter Shapley Gruppen mit …	
n	Shapley	je 2 Einheiten	je 4 Einheiten
4	15	7	15
8	255	31	31
12	4.095	127	63
16	65.535	511	127
20	1.048.575	2.047	255
24	16.777.215	8.191	511
28	268.435.455	32.767	1.023
32	4.294.967.295	131.071	2.047

Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (12/14)

Eigenschaften des gruppierten Shapley-Wertes:

- Komponenten addieren sich zum gemeinsamen Risiko auf
- Innerhalb einer Gruppe addieren sich die Komponenten zum Shapley-Wert der gesamten Gruppe auf
- Abhängigkeiten werden gruppenübergreifend und gruppenintern berücksichtigt
- Faire Vergleichbarkeit von Szenarien
- Faire Vergleichbarkeit der LoBs innerhalb der Gruppen
- Faire Vergleichbarkeit der Gruppen

Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (13/14)

Es kann kein anderes Allokationsverfahren geben, das

- **faire Vergleichbarkeit von Szenarien**
- **faire Vergleichbarkeit von LoBs innerhalb der Gruppen**
- **faire Vergleichbarkeit der Gruppen**

zugleich erfüllt (Land et al., 2001)

Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen (14/14)

Der hierarchische Shapley-Wert

Eine Permutation von Einheiten heißt „hierarchisch“ bzgl. $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$, wenn sie gruppiert ist, und alle Einheiten einer Gruppe den Einheiten einer Gruppe mit höherem Index vorangehen.

Bezeichnet P die Menge aller bezüglich $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$ hierarchischen Permutationen der Einheiten, so ist der hierarchische Shapley-Wert einer Risikofunktion R gerade:

$$\Phi_i(R) := \frac{1}{g_1!\ldots g_k!}\sum_{\pi\in P}\left[R\left(\bigcup_{j=1}^{\pi^{-1}(i)}\{\pi(j)\}\right) - R\left(\bigcup_{j=1}^{\pi^{-1}(i)-1}\{\pi(j)\}\right)\right]$$

Eigenschaften und Einzigartigkeitsaussagen gelten angelehnt an gruppiertes Shapley-Verfahren.

Inhalt

- Kapitalallokation
- Der Shapley-Wert
- Eigenschaften des Shapley-Wertes
- Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen
- Anwendung am Beispiel des SII-Standardmodells
- Fazit

Anwendungsbeispiel (1/2)

Beide Varianten des Shapley-Wertes …

- enthalten den Shapley-Wert als Spezialfall
- Komponenten addieren sich zum gemeinsamen Risiko auf
- Szenarien sind fair vergleichbar
- LoBs sind innerhalb der Gruppen fair vergleichbar

Sie unterscheiden sich …

- hinsichtlich der Interpretation der Summe der Komponenten einer Gruppe
- hinsichtlich der Frage, ob die Gruppen gleichrangig oder hierarchisch zu behandeln sind

Erst die Kombination beider Ansätze ist interessant in komplexen Modellen …

Anwendungsbeispiel (2/2)

Alle Angaben in Tsd. EUR		SCR		Allokation		
		Vorgabe	Berechnung	Global prop.	Iterativ prop.	Shapley grup.
SCR-NL (ohne Kat)			401.175		282.168	330.633
	Kraftfahrt	100.000		56.147	51.303	59.445
	Schiffahrt, Luftfahrt, Transport	50.000		28.073	25.652	22.244
	Feuer, Sach	150.000		84.220	76.955	81.481
	Haftpflicht	200.000		112.293	102.607	132.951
	Kredit,Kaution, Recht, Sonstige	50.000		28.073	25.652	34.512
SCR-NL (Kat)			150.333		105.737	90.774
	Naturgefahren	150.000		84.220	99.129	88.557
	Man-Made	10.000		5.615	6.609	2.217
SCR-Health			50.000		35.168	17.748
	Unfall	50.000		28.073	35.168	17.748
SCR-Life			3.687		2.593	1.040
	Langlebigkeit	3.000		1.684	1.729	730
	Kosten, Revision	1.500		842	864	310
SCR-Mkt			112.805		79.342	66.586
	Zinsänderung	15.000		8.422	8.501	2.590
	Aktien	50.000		28.073	28.336	26.983
	Immobilien	25.000		14.037	14.168	11.432
	Spread, Sonstige	50.000		28.073	28.336	25.581
SCR-Def			20.000		14.067	12.295
	Default	20.000		11.229	14.067	12.295
BSCR			519.075	519.075	519.075	519.075

Rot: gleichrangige Gruppen; Gelb: hierarchisch nachgelagerte Gruppe

Inhalt

- Kapitalallokation
- Der Shapley-Wert
- Eigenschaften des Shapley-Wertes
- Anpassung an Unternehmens- und Modellstrukturen
- Anwendung am Beispiel des SII-Standardmodells
- Fazit

Fazit

- Es gibt keine schlechten Allokationsverfahren, auch keine optimalen
- Jedes Verfahren spielt seine Stärken in geeigneten Anwendungen aus
- Der Shapley-Wert galt bislang als nahezu unmöglich zu berechnen
- Durch geeignete Strukturierung der Berechnungseinheiten in einem Risikomodell und
- Anwendung eines gruppierten, hierarchischen oder kombinierten Shapley-Verfahrens erreicht man:
  - eine dramatische Reduzierung des Berechnungsaufwandes
  - Anwendbarkeit von Standardmodell bis hin zu sehr detail-lierten internen Modellen
  - Optimierung für Fragestellungen, die den Vergleich von Szenarien und LoBs beinhalten

… und wie lösen wir das Beispiel der drei Witwen?

Jede der Witwen analysiert die Situation auf der Basis eines gruppierten Shapley-Wertes:

Der Richter bildet einen Mittelwert aus diesen subjektiven Sichtweisen. Er gelangt so zu der im Talmud beschriebenen Allokation.

Dankeschön für Ihre Aufmerksamkeit!

Literatur

ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.M., HEATH D. (1999). "Coherent measures of risk". *Mathematical Finance* 9 (3), 203–228.

AUMANN R.J. und MASCHLER M. (1985). „Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud“ *Journal of Economic Theory*, 36, 2: 195-213.

AUMANN R.J. (2002). “Some non-superadditive games, and their Shapley values, in the Talmud” *International Journal of Game Theory*, 39, 3-10.

DENAULT M. (2001). “Coherent allocation of risk capital”, The Journal of Risk, H. 1, 7-27.

LAND M., VOGEL C., GEFELLER O. (2001). “Partitioning methods for multifactorial risk attribution”, *Statistical Methods in Medical Research*, 10 (3), 217-230.

LAND M., GEFELLER O. (1999). “Attributing shares of risk to grouped or hierarchically ordered factors” in Gaul W.A. und Locarek-Junge H. (Eds), *Classification in the Information Age*, Springer-Verlag Heidelberg, 572-579.

SHAPLEY L.S. (1953). “A value for n-person games” in Kuhn H.W. und Tucker W. (Eds), *Contributions to the Theory of Games II*, 307-317.

YOUNG H.P. (1985). “Monotonic solutions of cooperative games”, *International Journal of Game Theory*, 14, 65-72.